# Semaine 30

mardi 10 juin 2025
> samedi 14 juin 2025

## Chapitre 20 Intégration sur un segment

### Construction, Présentation, Premières propriétés (polycopié) :

- **Définition (subdivision d'un segment $[a,\, b]$) :**
- **Définition (fonction continue par morceaux / en escalier) :** Les ensembles sont notés respectivement $\mathcal{CM}([a,\, b],\, \mathbb{R})$ et $\mathscr{E}([a,\, b],\, \mathbb{R})$.
- **Théorème (admis)** :
  Soit $f \in \mathcal{CM}([a,\, b])$ (avec $a < b$) alors :
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, (\varphi_\varepsilon, \psi_\epsilon) \in (\mathscr{E}([a, b]))^2,\ \varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leqslant \varepsilon$$
- **Propriétés opératoires** pour les fonctions de $\mathcal{CM}([a,\, b])$ :
  - Linéarité ;
  - Positivité (*corollaire :* croissance de $f \mapsto \int_I f$) ;
  - Relation de Chasles.
- **Inégalité de la moyenne :**
  $$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{R})^2,\ \left|\int_I fg\right| \leqslant \sup_I |f| \int_I |g|$$
- **Corollaire :** si $f \in \mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{R})$, $\left|\int_I f\right| \leqslant (b-a) \sup_I |f|$.
- **Propriété :** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,\, b],\, \mathbb{R})$, $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,\, b]} f = 0 \implies f = 0$.

### Intégrale et primitive ; théorème fondamental :

- **Théorème fondamental :**
  Soit $f$ une fonction réelle continue sur un intervalle $I$, $a \in I$ et la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ définie sur $I$.
  $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $f$.
- **Définition :** *primitive sur un segment.* On dit que $F : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ si elle est dérivable et si $F' = f$.
- **Corollaire 1 :** Toute fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur $I$. L'ensemble des primitives d'une fonction $f$ continue sur $I$ est, si $a \in I$ : $\left\{x \mapsto \displaystyle\int_a^x f + C, \quad C \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Corollaire 2 :** Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{R})$, si $(a,\, b) \in I^2$, et si $h$ est une primitive (quelconque) de $f$ sur $I$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = h(b) - h(a)$.
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** $\forall (a,\, b) \in \mathbb{R}^2$,
  $\forall (f,\, g) \in \mathcal{C}^0([a,\, b],\, \mathbb{R})^2$, on a : $\left(\displaystyle\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$.
  Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les fonctions $f$ et $g$ sont proportionnelles.
- **Inégalité de Minkowski :** Si $a \leqslant b$ et $(f,\, g) \in \mathcal{C}'([a,\, b],\, \mathbb{R})^2$, on a :
  $$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}$$
- **Théorème (Formule de Taylor avec Reste Intégral) :**
  Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ; $\forall (a,\, b) \in I^2$, $\forall f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\, \mathbb{R})$, on a :
  $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\ \mathrm{d}x$$
  On parle de « *formule de Taylor avec reste intégral de $f$ en $a$ à l'ordre $n$* ».
- **Remarque (Inégalité de Taylor-Lagrange) :**
  Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\, \mathbb{R})$, en notant $M_{n+1} = \sup_{t \in [a,\, b]} |f^{(n+1)}(t)|$, on retrouve :
  $$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

### Calculs de primitives et d'intégrales :

- **Formule d'intégration par parties :**
  Soit $(f,\, g) \in \left(\mathcal{C}^1([a,\, b],\, \mathbb{R})\right)^2$, alors : $\displaystyle\int_a^b f'g = \big[fg\big]_a^b - \int_a^b fg'$.
- **Formule de changement de variable $\mathcal{C}^1$ :**
  Soit $\varphi : [\alpha,\, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ; on note $[a,\, b] = \varphi([\alpha,\, \beta])$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,\, b],\, \mathbb{R})$ ; alors : $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi'$.
- **Application :** Intégrales de fonctions périodiques, paires, impaires…
- **Primitives usuelles**
  Les primitives des fonctions usuelles doivent être connues (***avec leur domaine de définition***).
- **Primitives des fractions rationnelles :**
  Le théorème de décomposition en éléments simples permet de déterminer les primitives de toute fonction rationnelle. On a donné rapidement la méthode générale et on a traité quelques exemples.
- **Primitives des polynômes en cos, sin :**
  Par linéarité, on se ramène aux monômes : $\cos^p \sin^q$.
  Dans tous les cas, on peut également linéariser lorsque les valeurs de $p$ et $q$ sont raisonnables ; exemple d'application des règles de Bioche.
- **Règles de Bioche (admises)**
  Lors du calcul d'une primitive ou d'une intégrale de fonction rationnelle en cos et sin, les changements de variables suivants permettent de ramener l'étude au cas d'une fonction rationnelle.
  - Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement de $x$ en $-x$ on peut poser $t = \cos(x)$ dans l'intégrale.
  - Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement de $x$ en $\pi - x$ on peut poser $t = \sin(x)$ dans l'intégrale.
  - Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement de $x$ en $\pi + x$ on peut poser $t = \tan(x)$ dans l'intégrale.

  Dans tous les cas, le changement de variable ( « universel » ) $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ fonctionne.

### Intégrales (approximations et sommes de Riemann) :

- **Théorème (Sommes de Riemann) :**
  Si $f \in \mathcal{C}^1([a,\, b],\, \mathbb{R})$ avec $a < b$ ; et si $\sigma_n$ est la subdivision régulière à $n+1$ éléments $\sigma_n = \left(a + \dfrac{b-a}{n}k\right)_{k \in [\![0,\, n]\!]}$.
  $$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$
  **Remarques :**
  - Une première définition des sommes de Riemann concerne une somme associée à une subdivision pointée quelconque et une fonction continue par morceaux.
  - En pratique, on se restreint à des subdivisions régulières avec les points associés égaux aux extrémités gauches ou droites des intervalles.
  - La preuve de la convergence des sommes de Riemann est uniquement à connaître pour des fonctions $\mathcal{C}^1$, ou des fonctions lipschitziennes.
  - On pourra parler de somme de Riemann directement dans le cas précédent ou pour : $\widetilde{R_n}(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)$.
- **Propriété (Majoration de l'erreur dans la méthode des rectangles) :**
  Lorsque $f \in \mathcal{C}^0([a,\, b],\, \mathbb{R})$ est $K$-lipschitzienne sur $[a,\, b]$, on peut majorer l'erreur réalisée en approchant l'intégrale de $f$ par la somme de Riemann :
  $$|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - R_n(f)| \leqslant K\frac{(b-a)^2}{n}$$
- **Définition (Méthode des trapèzes) :**
  On appelle somme des trapèzes associée à une fonction $f$ sur un segment $[a,\, b]$ et à la subdivision régulière $\sigma_n = (a_k)_{k \in [\![0,\, n]\!]}$ l'expression :
  $$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\right)$$
  $$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n}\Big(f(a_k) + f(a_{k+1})\Big)$$
- **Propriété (Majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes) :**
  Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2([a,\, b])$ alors :
  $$\left|\int_a^b f - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(f)$$
  avec $M_2(f) = \sup_{t \in [a,\, b]} \left|f''(t)\right|$.

## Chapitre 21 Probabilités (et dénombrement)

### Dénombrement :

- **Propriété :** Soit $(p,\, n) \in \mathbb{N}^2$ ;
  **1** • Il existe une injection de $[\![1,\, p]\!]$ dans $[\![1,\, n]\!]$ si et seulement si $p \leqslant n$.
  **2** • Il existe une surjection de $[\![1,\, p]\!]$ sur $[\![1,\, n]\!]$ si et seulement si $p \geqslant n$.
  **3** • Il existe une bijection de $[\![1,\, p]\!]$ dans $[\![1,\, n]\!]$ si et seulement si $p = n$.
  **4** • Si $n > 0$, toute injection de $[\![1,\, n]\!]$ dans $[\![1,\, n]\!]$ est bijective.
  **5** • Si $n > 0$, toute surjection de $[\![1,\, n]\!]$ dans $[\![1,\, n]\!]$ est bijective.
- **Propriété :** Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.
- **Définition :** Un ensemble $E$ est *fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $[\![1,\, n]\!]$ sur $E$.
  S'il existe, cet entier est unique (c'est le corollaire précédent) ; on l'appelle le *cardinal* de $E$ et on le note $\mathrm{card}(E)$, ou $|E|$ ou encore $\#E$.
  On a en particulier $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$ et $\mathrm{card}([\![1,\, n]\!]) = n$.
- **Propriété :** Toute partie $I$ de l'ensemble $[\![1,\, n]\!]$ est finie et de cardinal inférieur ou égal à $n$.
  Si le cardinal de $I$ est égal à $n$, alors $I = [\![1,\, n]\!]$.
- **Propriété :** Si $E_1$ et $E_2$ sont deux ensembles finis **disjoints** (c'est-à-dire $E_1 \cap E_2 = \varnothing$), alors : $E_1 \cup E_2$ est fini et $|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$.
- **Propriété :** Si $E_1$ et $E_2$ sont deux ensembles finis (non nécessairement disjoints), $E_1 \cup E_2$ et $E_1 \cap E_2$ sont finis et : $|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|$.

- **Propriété :** Si $E_1$ et $E_2$ sont deux ensembles finis, $E_1 \times E_2$ est fini et $|E_1 \times E_2| = |E_1|\,|E_2|$.
- **Propriété :** Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis, l'ensemble des applications de $E$ dans $F$, noté $F^E$ est un ensemble fini de cardinal $|F|^{|E|}$.
- **Propriété :** Si $E$ est un ensemble fini, l'ensemble des parties de $E$, $\mathscr{P}(E)$, est fini de cardinal $2^{|E|}$.
- **Propriété :** Si $p$ et $n$ sont deux entiers non nuls, le nombre d'injections de $[\![1,\, p]\!]$ dans $[\![1,\, n]\!]$ (encore appelées $p$-arrangements de $[\![1,\, n]\!]$) est noté $A_n^p$ et vaut $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
  Si $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de bijections de $[\![1,\, n]\!]$ sur lui-même vaut $n!$.
- **Définition :** Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de parties de $[\![1,\, n]\!]$ à $k$ éléments est noté $\dbinom{n}{k}$ (on parle de $k$-combinaisons de $[\![1,\, n]\!]$) et vaut $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

## Probabilités, Évènements :

- **Vocabulaire :** Expérience aléatoire, Univers, Évènements, Évènements élémentaires (dans le cas d'un univers fini uniquement).
  **Le programme de première année est limité aux cas où l'univers $\Omega$ est fini !**.
- Si $A$ et $B$ sont deux évènements de $\Omega$, l'évènement « $A$ et $B$ » est $A \cap B$.
- Si $A$ et $B$ sont deux évènements de $\Omega$, l'évènement « $A$ ou $B$ » est $A \cup B$.
- **Évènement contraire :** l'évènement contraire d'un évènement $A$ est l'évènement $\Omega \setminus A$ ; on le note $\overline{A}$.
- **Évènements incompatibles :** Deux évènements $A$ et $B$ sont dits incompatibles lorsque $A \cap B = \varnothing$.
- **Système complet d'évènements :** Une famille (finie) d'évènements $(A_1,\, \ldots,\, A_r)$ telle que
  - $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{r} A_k = \Omega$
  - $\forall (i,\, j) \in [\![1,\, r]\!]^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing.$

  est un *système complet d'évènements de* $\Omega$ (s.c.e.).
- **Probabilité :** Une fonction $\mathbb{P} \ : \ \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\, 1]$ est une probabilité sur $\Omega$ lorsque :
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;
  - $\forall (A,\, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \quad A \cap B = \varnothing \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0.$
- Si $A_1,\, \ldots,\, A_n$ sont deux à deux incompatibles : $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (croissance de $\mathbb{P}$).
- $\forall (A,\, B) \in \big(\mathcal{P}(\Omega)\big)^2, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$
- **Propriété :** Pour un univers $\Omega$ fini de cardinal $n$ : $\Omega = \{\omega_1,\, \ldots,\, \omega_n\}$, se donner une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega$ est équivalent à choisir $(p_1,\, \ldots,\, p_n) \in \mathbb{R}^n$ de façon à avoir :
  - $\forall k \in [\![1,\, n]\!], \quad 0 \leqslant p_k \leqslant 1$
  - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

  et prendre : $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$ pour tout $k \in [\![1,\, n]\!]$.

## Probabilités conditionnelles :

- **Définition :** Soit $(\Omega,\, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini ;
  pour un évènement $B$ tels que ${}^2\mathbb{P}(B) > 0$, on peut définir la probabilité conditionnelle sachant $B$, $\mathbb{P}_B$, par :
  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$
  On note $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A \mid B)$ la probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$.
- **Propriété :** Si $A$ et $B$ sont deux évènements non impossibles ($\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$), on a :
  $\mathbb{P}\Big(A \mid B\Big) = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}\Big(B \mid A\Big).$
- **Formule des probabilités composées :** Si $A_1,\ A_2,\, \ldots,\, A_r$ sont des évènements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{r-1}) > 0$, alors :
  $\mathbb{P}\Big(A_1 \cap \ldots \cap A_r\Big) = \mathbb{P}(A_1)\displaystyle\prod_{k=1}^{r-1}\mathbb{P}\Big(A_{k+1} \Bigm| A_1 \cap \cdots \cap A_k\Big).$
- **Formule des probabilités totales :** Soit $(A_1,\, \ldots,\, A_r)$ un système complet d'évènements tel que :
  $\forall k \in [\![1,\, r]\!], \quad \mathbb{P}(A_k) > 0.$
  $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k).$
- **Formule de Bayes :** Soit $(A_1,\, \ldots,\, A_r)$ un système complet d'évènements tel que :
  $\forall k \in [\![1,\, r]\!], \quad \mathbb{P}(A_k) > 0$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ alors :
  $\mathbb{P}\Big(A_j \Bigm| B\Big) = \dfrac{\mathbb{P}\Big(B \Bigm| A_j\Big)\mathbb{P}(A_j)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\mathbb{P}\Big(B \Bigm| A_k\Big)\mathbb{P}(A_k)}.$

## Indépendance d'évènements :

- **Définition :** On dit que deux évènements $A$ et $B$ sont *indépendants* si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- **Définition :** Des évènements $A_1,\, \ldots,\, A_r$ sont *mutuellement indépendants* si pour toute partie non vide $I$ de $[\![1,\, r]\!]$, on a :
  $$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$
- **Remarque :** L'indépendance mutuelle entraîne « l'indépendance deux à deux »(la réciproque est fausse pour plus de deux évènements).
- **Propriété:** Si $A_1,\, \ldots,\, A_r$ sont des évènements mutuellement indépendants et si on pose $B_k = \overline{A_k}$ pour tout $k \in [\![1,\, r]\!]$, les évènements $B_1,\, \ldots,\, B_r$ sont mutuellement indépendants.
- **Propriété :** L'indépendance de deux évènements non impossibles $A$ et $B$ équivaut à ce que $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

## Variables aléatoires :

- **Définition :** Une variable aléatoire (*v.a.*) sur un espace probabilisé fini $(\Omega,\, \mathbb{P})$ est une fonction $X \ : \ \Omega \to E$.
  L'ensemble des valeurs prises par $X$ est $X(\Omega)$ (l'univers image).
  Si $A$ est un évènement, l'évènement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.
  Lorsque $A$ est réduit à un seul élément, on utilise $\{X = x\}$ plutôt que $\{X \in \{x\}\}$.
- **Propriété :** Si $X \ : \ \Omega \to E$ est une v.a. sur l'espace probabilisé $(\Omega,\, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E$, la fonction $\mu \ : \ A \to \mathbb{P}(X \in A)$ définit une probabilité sur l'univers fini $X(\Omega)$ (ou sur $E$ au choix).
  On note cette probabilité $\mu = \mathbb{P}_X$.
- **Fonction de répartition** Pour une variable aléatoire **réelle** $X$ sur $(\Omega,\, \mathbb{P})$, on définit la fonction de répartition de $X$ : $F_X \ : \ \left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to [0,\, 1] \\ x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)\end{array}\right.$.
- **Propriétés :** La fonction de répartition $F_X$ d'une v.a.r. $X$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,\, 1]$ telle que :
  - $F_X$ est croissante, continue à droite.
  - $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  - Comme $\Omega$ est fini, $F_X$ est en escalier sur tout segment de $\mathbb{R}$.
- **Propriété :** Soit $X$ une variable aléatoire **réelle et finie** de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition $F_X$, alors :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \displaystyle\sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \leqslant x}} \mathbb{P}_X(y)$.
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}_X(x) = F_X(x) - \displaystyle\lim_{t \to x^-} F_X(t)$
- **Espérance :** Soit $X \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r. ; on appelle *espérance* de $X$ et on note $\mathbb{E}(X)$ le réel :
  $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$
  Une v.a.r. $X$ est dite *centrée* lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.
- **Inégalité de Markov :**
  Si $X$ est une v.a.r. et si $a > 0$, alors $\mathbb{P}\Big(|X| > a\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.
  Dans le cas d'une v.a.r. **positive**, on peut dire $\mathbb{P}\Big(X > a\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$.
- **Variance :** Si $X \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.r., on appelle variance de $X$ le quantité $V(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big)$.
  On a ausi $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \Big(\mathbb{E}(X)\Big)^2$ (on parle de **formule de Kœnig-Huygens**).
- **Écart-type :** On appelle écart-type de $X$ et on note $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
  Une v.a.r. $X$ est dite *réduite* lorsque $V(X) = 1$.
- On a pour tout variable aléatoire finie réelle, $\sigma(X) \geqslant 0$ et $\forall (\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \sigma(\lambda X + \mu) = |\lambda|\sigma(X)$.
- Si $X \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.r. telle que $\sigma(X) > 0$, alors $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une v.a.r. centrée et réduite.
- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** Si $X$ est une v.a.r. et $a > 0$, alors $\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\Big) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$

## Lois usuelles :

- Pour chacune des lois suivantes, on doit connaître : la loi de probabilité, l'espérance, la variance et une expérience permettant de de la réaliser :
  - loi certaine.
  - loi uniforme sur $[\![1,\, b]\!]$ ($\mathcal{U}([\![1,\, b]\!])$).
  - Loi de Bernoulli ($\mathcal{B}(p)$)
  - Loi binomiale ($\mathcal{B}(n,\, p)$)

## Couples de variables aléatoires :

- Lois marginales, loi conjointe
- Indépendance de deux variables aléatoires