



Chapitre 17 Espaces vectoriels de dimension finie

■ Notion de Rang :

► Définition (rang d'une famille de vecteurs) :

Si $(u_1, \dots, u_p)$ sont des vecteurs de E , on appelle *rang* de la famille et on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ la dimension de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

► Propriétés élémentaires :

- $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \text{rg}(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.
- $\text{rg}(\lambda u_1, \dots, \lambda u_p) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ pour $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- $\text{rg}\left(u_1 + \sum_{k=2}^p \lambda_k u_k, u_2, \dots, u_p\right) = \text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ si $(\lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$.
- $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p, 0_E)$.

► Définition (rang d'une application linéaire) :

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\text{im} f$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, on appelle *rang* de f et on note $\text{rg} f$, la dimension de $\text{im} f$.

► Propriété : Si E est de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E , alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

► Propriété : Si E et F sont de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\text{rg} f \leq \min(\dim E, \dim F)$.

► Propriété (caractérisations de la surjectivité et de l'injectivité) :

Si E et F sont de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\text{rg}(f) = \dim F$ ssi f est surjective sur F , $\text{rg}(f) = \dim E$ ssi f est injective.

► Propriété : Si E et F sont de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il y a équivalence entre :

- $f \in \text{Isom}(E, F)$
- L'image de toute base de E est une base de F .
- L'image d'une base de E est une base de F

► Propriété : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et si l'une de ces applications est de rang fini, alors $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg} f, \text{rg} g)$. En particulier, si g est bijective $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$ et si f est bijective $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.

Théorème (théorème du rang) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et F un $\mathbb{K}$ -e.v. quelconque, alors :

$$\dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

(ou encore $\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\ker(f))$).

► Théorème : Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -e.v. de même dimension n , et si f est une application linéaire de E dans F , on a équivalence entre :

- f est injective
- f est surjective
- f est bijective
- $\text{rg}(f) = n$
- f est inversible à droite
- f est inversible à gauche

Chapitre 18 Matrices – Applications linéaires

■ Définitions - Vocabulaire :

► Propriété (lien avec les applications linéaires) :

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies p et n respectivement, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ sont des bases de E et F ; on note m_{ij} les composantes des images des vecteurs de la

base $\mathcal{E}$ par $u : \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i$.

On dit que $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = (m_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ est la *matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$* .

► Propriété : $\phi_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

$$u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} u$$

Exercice :

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions p et n (non nulles) et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire de rang r , alors il existe des bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de E et F telles que la matrice associée soit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

► Propriété : Le produit matriciel est bilinéaire, associatif. Le produit de matrices carrées d'ordre n est non commutatif si $n > 1$.

► Rappel : Cas particulier du produit des matrices élémentaires.

► Propriété : Une matrice est inversible si et seulement si elle admet un inverse à gauche, si et seulement si elle admet un inverse à droite.

► Propriété : Stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par produit ; l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.

► Définition : Transposée d'une matrice M ; notation ${}^t M$ (ou M^T).

► Propriétés élémentaires : $(AB)^T, (M^T)^T$.

► Propriété : $\phi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

$$M \mapsto M^T$$

► Définition : Ensembles des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

► Exercice : Notion de matrice définie par bloc et de produit par blocs.

■ Interprétation matricielle d'une application linéaire - notion de rang :

► Définition : Matrice d'un vecteur relativement à une base.

► Définition : Matrice associée à une famille de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$.

► Définition (matrice de passage entre deux bases) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base; si $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ est une autre base de E , on note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$* .
Il s'agit de la matrice dont le j -ème vecteur colonne représente les composante de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Autrement dit : $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

► Propriétés élémentaires :

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est une matrice inversible, d'inverse $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} : P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.

► Propriété (formule de changement de base pour les vecteurs) :

Si $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, alors $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$

Propriété (formule de changement de base pour les applications) :

Si E, F sont deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions non nulles p et n respectivement. On considère $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux bases de F ; on note $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$; si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si on note $M = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} f$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'} f$, alors on a $M' = Q^{-1} M P$.

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{E}) & \xrightarrow{f} & (F, \mathcal{F}) \\ \uparrow \text{Id}_E \uparrow P & & \uparrow \text{Id}_F \uparrow Q \\ (E, \mathcal{E}') & \xrightarrow{f} & (F, \mathcal{F}') \\ & M' & \end{array}$$

► Corollaire (cas particulier d'un endomorphisme) :

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on prend $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ et $\mathcal{E}' = \mathcal{F}'$; si on note $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{E}} f$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{E}'} f$, alors $M' = P^{-1} M P$.

► Définition (rang d'une matrice) :

Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire canoniquement associée.

► Propriété : Si $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(PAQ)$.

► Propriété : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; il y a équivalence entre :

- M est inversible.
- L'application linéaire canoniquement associée à M est bijective.
- $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), MN = I_n$.
- $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), NM = I_n$.
- Toute application linéaire dont la matrice d'une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$ vers une base $\mathcal{F}$ est égale à M est bijective.
- $M \sim_L I_n$.
- $\text{rg}(M) = n$.
- M est une matrice de passage entre deux bases.
- Pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, il existe une base $\mathcal{E}$ telle que $M = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$.
- Pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, il existe une base $\mathcal{F}$ telle que $M = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$.

► Exercice (réduction du rang) :

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang r , alors il existe deux matrices $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = Q J_r P$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

► Définition (opérations élémentaires) :

Rappel sur les opérations élémentaires et leurs matrices associées.

► Corollaire : Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \text{rg} A = \text{rg}(A^T)$.

► Application : Calcul de l'inverse d'une matrice.

Chapitre 19 Déterminants

■ Déterminant d'une famille de vecteurs :

► Définition : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $\mathcal{E}$ une base de E .

Il existe une unique application $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- f est linéaire par rapport à chacune de ses variables;
- f est alternée;
- $f(\mathcal{E}) = 1$.

On notera $\det_{\mathcal{E}}$ cette fonction.

► Propriété : Avec les notations précédentes, si $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire par rapport à chaque variable et alternée, alors elle est un multiple de $\det_{\mathcal{E}}$.

► Exemple : Cas particuliers en dimension 2 et 3, expression dans une base en fonction des coordonnées; interprétation comme une aire / un volume orienté(e).

► Propriété : La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

■ Déterminant d'un endomorphisme :

- **Définition / propriété :** Si φ est un endomorphisme de E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, le déterminant de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie, on le note $\det(\varphi)$.

■ Déterminant d'une matrice carrée :

- **Propriété :** Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ le déterminant dans la base canonique de l'endomorphisme canoniquement associé à A .
- **Propriété :** Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.
- **Propriété :** $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

- **Propriété :** Effet des opérations de pivot en colonnes sur un déterminant ; application au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.

Chapitre 20 Intégration sur un segment

■ Construction, Présentation, Premières propriétés (polycopié) :

- **Définition (subdivision d'un segment $[a, b]$) :**
- **Définition (fonction continue par morceaux / en escalier) :** Les ensembles sont notés respectivement $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.
- **Théorème (admis) :**
Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b])$ (avec $a < b$) alors :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists (\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \in (\mathcal{E}([a, b]))^2, \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leq \varepsilon$$
- **Propriétés opératoires** pour les fonctions de $\mathcal{CM}([a, b])$:

- Linéarité ;
- Positivité (corollaire : croissance de $f \mapsto \int_a^b f$) ;

■ Intégrale et primitive ; théorème fondamental :

- **Théorème fondamental :**
Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I , $a \in I$ et la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ définie sur I .
 F est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est f .

- **Définition : primitive sur un segment.** On dit que $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si elle est dérivable et si $F' = f$.
- **Corollaire 1 :** Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I . L'ensemble des primitives d'une fonction f continue sur I est, si $a \in I : \left\{ x \mapsto \int_a^x f + C, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$.
- **Corollaire 2 :** Si I est un intervalle de $\mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}),$ si $(a, b) \in I^2$, et si h est une primitive (quelconque) de f sur I , alors $\int_a^b f(t) dt = h(b) - h(a)$.

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$
$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})^2, \text{ on a : } \left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.

■ Calculs de primitives et d'intégrales :

- **Formule d'intégration par parties :**
Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}))^2$, alors : $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$
- **Formule de changement de variable $\mathcal{C}^1$:**
Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; on note $[a, b] = \varphi([\alpha, \beta])$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$; alors : $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \varphi'.$
- **Application :** Intégrales de fonctions périodiques, paires, impaires...
- **Primitives usuelles**
Les primitives des fonctions usuelles doivent être connues (avec leur domaine de définition).
- **Primitives des fractions rationnelles :**

■ Intégrales (approximations et sommes de Riemann) :

- **Théorème (Sommes de Riemann) :**
Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$; et si σ_n est la subdivision régulière à $n + 1$ éléments $\sigma_n = \left(a + \frac{b-a}{n}k \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.
$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Remarques :

- Une première définition des sommes de Riemann concerne une somme associée à une subdivision pointée quelconque et une fonction continue par morceaux.
- En pratique, on se restreint à des subdivisions régulières avec les points associés égaux aux extrémités gauches ou droites des intervalles.
- La preuve de la convergence des sommes de Riemann est uniquement à connaître pour des fonctions $\mathcal{C}^1$, ou des fonctions lipschitziennes.
- On pourra parler de somme de Riemann directement dans le cas précédent ou pour : $\widetilde{R}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right).$

dépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie, on le note $\det(\varphi)$.

- **Propriétés :** on peut traduire les propriétés opératoires des déterminants matriciels pour les déterminants d'endomorphismes.

- **Propriété :** Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- **Propriété :** Le déterminant d'un produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le produit des déterminants.
- **Propriété :** Le déterminant d'une matrice et de sa transposée sont égaux.
- **Définition :** Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
- **Propriétés :** formules de développement par rapport à une ligne ou à une colonne.
- **Propriété :** Déterminant d'une matrice triangulaire.
- **Exercice :** Déterminant de la matrice de Vandermonde.

- Relation de Chasles.

- **Inégalité de la moyenne :**

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})^2, \left| \int_I fg \right| \leq \sup_I |f| \int_I |g|$$

- **Corollaire :** si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}), \left| \int_I f \right| \leq (b-a) \sup_I |f|.$

- **Propriété :** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), f \geq 0$, alors $\int_{[a, b]} f = 0 \implies f = 0$.

- **Inégalité de Minkowski :** Si $a \leq b$ et $(f, g) \in \mathcal{C}'([a, b], \mathbb{R})^2$, on a :

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leq \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}$$

Théorème (Formule de Taylor avec Reste Intégral) :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}; \forall (a, b) \in I^2, \forall f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

On parle de « formule de Taylor avec reste intégral de f en a à l'ordre n ».

- **Remarque (Inégalité de Taylor-Lagrange) :**

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, en notant $M_{n+1} = \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$, on retrouve :

$$|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Le théorème de décomposition en éléments simples permet de déterminer les primitives de toute fonction rationnelle. On a donné rapidement la méthode générale et on a traité quelques exemples.

- **Primitives des polynômes en cos, sin :**

Par linéarité, on se ramène aux monômes : $\cos^p \sin^q$. Dans tous les cas, on peut également linéariser lorsque les valeurs de p et q sont raisonnables ; exemple d'application des règles de Bioche.

- **Règles de Bioche (admisses)**

Lors du calcul d'une primitive ou d'une intégrale de fonction rationnelle en cos et sin, les changements de variables suivants permettent de ramener l'étude au cas d'une fonction rationnelle.

- Si $f(x) dx$ est invariant par le changement de x en $-x$ on peut poser $t = \cos(x)$ dans l'intégrale.
- Si $f(x) dx$ est invariant par le changement de x en $\pi - x$ on peut poser $t = \sin(x)$ dans l'intégrale.
- Si $f(x) dx$ est invariant par le changement de x en $\pi + x$ on peut poser $t = \tan(x)$ dans l'intégrale.

Dans tous les cas, le changement de variable (« universel ») $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonctionne.

Propriété (Majoration de l'erreur dans la méthode des rectangles) :

Lorsque $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est K -lipschitzienne sur $[a, b]$, on peut majorer l'erreur réalisée en approchant l'intégrale de f par la somme de Riemann :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - R_n(f) \right| \leq K \frac{(b-a)^2}{n}$$

- **Définition (Méthode des trapèzes) :**

On appelle somme des trapèzes associée à une fonction f sur un segment $[a, b]$ et à la subdivision régulière $\sigma_n = (a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ l'expression :

$$\begin{aligned} T_n(f) &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n} \left(f(a_k) + f(a_{k+1}) \right) \end{aligned}$$

- **Propriété (Majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes) :**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$ alors :

$$\left| \int_a^b f - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(f)$$

avec $M_2(f) = \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$