# Semaine 28

lundi 19 mai 2025
> samedi 24 mai 2025

## Chapitre 17 Espaces vectoriels de dimension finie

### Notion de Dimension :

- **Définition :** On dit qu'un $\mathbb{K}$-e.v. est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ s'il admet une famille génératrice finie.
- **Lemme (d'échange) :**
Si $E$ possède une base de cardinal $n$, toute famille de vecteurs infinie ou de cardinal supérieur ou égal à $n+1$, est liée.
- **Corollaire (équicardinalité des bases) :**
Si $E$ admet une base finie de cardinal $n$, alors toutes les bases ont pour cardinal $n$.
On note $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E)$ ce cardinal commun ($\mathbf{dim}(E)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté).
- **Exemples :** $\mathbf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, $\mathbf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X])$.
- **Propriété :** On peut revenir sur l'*équivalence libre maximale – génératrice minimale – base* dans le cadre d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie :
Si $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n$ et si $(e_1, \dots, e_k)$ est une famille de vecteurs de $E$ :
  - Si $k > n$, la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est liée.
  - Si $k < n$, $(e_1, \dots, e_k)$ n'est jamais génératrice.
  - Si $k = n$, $(e_1, \dots, e_k)$ base ssi libre ssi génératrice.
- **Corollaire :** Dans un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n$, pour montrer qu'une famille de $n$ vecteurs est une base il suffit de montrer qu'elle est libre (ou bien qu'elle est génératrice).
- **Corollaire :** Si $E$ est de dimension finie et qu'il existe un isomorphisme entre $E$ et $F$, alors $F$ est de dimension finie, égale à celle de $E$.
- **Théorème (théorème de la base incomplète) :**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, si $\mathcal{L}$ est une famille libre de vecteurs de $E$ et si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice dans $E$, il existe une sous-famille $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}'$ soit une base de $E$.
- **Corollaire :** De toute famille génératrice on peut extraire une base ; en particulier, un $\mathbb{K}$-e.v. est de dimension finie ssi il admet une base de cardinal fini.
- **Propriété :** Soit $F$ un s-e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$ de dimension $n$ alors : $F$ est de dimension finie $p$, et $p \leqslant n$.
- **Corollaire :** Si $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $F$ un s-e.v. de $E$, $F = E$ ssi $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(F) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E)$.
- **Propriété (existence et dimension d'un supplémentaire) :**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie ; tout s-e.v. de $E$ admet un supplémentaire $G$. De plus, $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(F) + \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(G)$.
- **Vocabulaire :** les s-e.v. de dimension 1 sont les *droites vectorielles*, ceux de dimension $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E) - 1$ sont les *hyperplans*.
- **Propriété :** Si $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque *a priori* et si $F$ et $G$ sont deux s-e.v. de $E$ supplémentaires et de dimension finie, alors $E$ est de dimension finie et $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(F) + \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(G)$.
- **Propriété (formule de Grassmann) :**
Si $E_1$ et $E_2$ sont deux s-e.v. de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$, alors :
$$\mathbf{dim}(E_1) + \mathbf{dim}(E_2) = \mathbf{dim}(E_1 \cap E_2) + \mathbf{dim}(E_1 + E_2)$$
- **Corollaire (caractérisation des supplémentaires en dimension finie) :**
Soit $E_1$ et $E_2$ deux s-e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Il y a équivalence entre :
  - $E_1 \oplus E_2 = E$
  - $E_1 + E_2 = E$ et $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E_1) + \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E_2) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E)$
  - $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E_1) + \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E_2) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E)$
- **Propriété :** Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies, $E \times F$ également et $\mathbf{dim}(E \times F) = \mathbf{dim}(E) + \mathbf{dim}(F)$.
Si $E_1, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies alors leur produit aussi et $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}\left(\prod_{k=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E_i)$.
- **Corollaire :** Tout $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- **Propriété :** Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies, $\mathscr{L}(E, F)$ également et $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}\big(\mathscr{L}(E, F)\big) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E)\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(F)$.

### Notion de Rang :

- **Définition (rang d'une famille de vecteurs) :**
Si $(u_1, \dots, u_p)$ sont des vecteurs de $E$, on appelle *rang* de la famille et on note $\mathbf{rg}(u_1, \dots, u_p)$ la dimension de $\mathbf{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
- **Propriétés élémentaires :**
  - $\mathbf{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathbf{rg}(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.
  - $\mathbf{rg}(\lambda u_1, \dots, u_p) = \mathbf{rg}(u_1, \dots, u_p)$ pour $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
  - $\mathbf{rg}\left(u_1 + \sum_{k=2}^{p} \lambda_k u_k, u_2, \dots, u_p\right) = \mathbf{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ si $(\lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$.
  - $\mathbf{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathbf{rg}(u_1, \dots, u_p, 0_E)$.
- **Définition (rang d'une application linéaire) :**
Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\mathbf{im} f$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, on appelle *rang de* $f$ et on note $\mathbf{rg} f$, la dimension de $\mathbf{im} f$.
- **Propriété :** Si $E$ est de dimension finie et si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de $E$, alors $\mathbf{rg}(f) = \mathbf{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$.
- **Propriété :** Si $E$ et $F$ sont de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathbf{rg} f \leqslant \min(\mathbf{dim} E, \mathbf{dim} F)$.
- **Propriété (caractérisations de la surjectivité et de l'injectivité) :**
Si $E$ et $F$ sont de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathbf{rg}(f) = \mathbf{dim} F$ ssi $f$ est surjective sur $F$, $\mathbf{rg}(f) = \mathbf{dim} E$ ssi $f$ est injective.
- **Propriété :** Si $E$ et $F$ sont de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il y a équivalence entre :
  - $f \in \mathrm{Isom}(E, F)$
  - L'image de toute base de $E$ est une base de $F$.
  - L'image d'une base de $E$ est une base de $F$
- **Propriété :** Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ et si l'une de ces applications est de rang fini, alors $\mathbf{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathbf{rg} f, \mathbf{rg} g)$. En particulier, si $g$ est bijective $\mathbf{rg}(g \circ f) = \mathbf{rg}(f)$ et si $f$ est bijective $\mathbf{rg}(g \circ f) = \mathbf{rg}(g)$.
- **Théorème (théorème du rang) :**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $F$ un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque, alors :
$$\mathbf{dim}(\mathbf{im}(f)) + \mathbf{dim}(\mathbf{ker}(f)) = \mathbf{dim}(E)$$
(ou encore $\mathbf{rg}(f) = \mathbf{dim}(E) - \mathbf{dim}(\mathbf{ker}(f))$).
- **Théorème :** Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de même dimension $n$, et si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, on a équivalence entre :
  - $f$ est injective
  - $f$ est surjective
  - $f$ est bijective
  - $\mathbf{rg}(f) = n$
  - $f$ est inversible à droite
  - $f$ est inversible à gauche

## Chapitre 18 Matrices – Applications linéaires

### Définitions - Vocabulaire :

- **Propriété (lien avec les applications linéaires) :**
Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies $p$ et $n$ respectivement, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ sont des bases de $E$ et $F$ ; on note $m_{ij}$ les composantes des images des vecteurs de la base $\mathscr{E}$ par $u$ : $\forall j \in 1, p, \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i$.
On dit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) = (m_{ij})_{\substack{i \in 1, n \\ j \in 1, p}}$ est la *matrice de l'application linéaire $u$ dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$*.
- **Propriété :** $\phi_{\mathscr{E},\mathscr{F}} : \left| \begin{array}{l} \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}} u \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
- **Exercice :**
Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions $p$ et $n$ (non nulles) et si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est une application linéaire de rang $r$, alors il existe des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ de $E$ et $F$ telles que la matrice associée soit : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- **Propriété :** Le produit matriciel est bilinéaire, associatif. Le produit de matrices carrées d'ordre $n$ est non commutatif si $n > 1$.
- **Rappel :** Cas particulier du produit des matrices élémentaires.
- **Propriété :** Une matrice est inversible si et seulement si elle admet un inverse à gauche, si et seulement si elle admet un inverse à droite.
- **Propriété :** Stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par produit ; l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.
- **Définition :** Transposée d'une matrice $M$ ; notation ${}^tM$ (ou $M^T$).
- **Propriétés élémentaires :** $(AB)^T$, $(M^T)^T$.
- **Propriété :** $\phi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M \mapsto M^T \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

- **Définition :** Ensembles des matrices symétriques et antisymétriquessont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- **Exercice :** Notion de matrice définie par bloc et de produit par blocs.

## ■ Interprétation matricielle d'une application linéaire - notion de rang :

- **Définition :** Matrice d'un vecteur relativement à une base.
  Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases.
- **Définition :** Matrice associée à une famille de vecteurs dans une base $\mathscr{B}$.
- **Définition (matrice de passage entre deux bases) :**
  Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base ; si $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ est une autre base de $E$, on note $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ la *matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$*.
  Il s'agit de la matrice dont le $j$-ème vecteur colonne représente les composante de $e'_j$ dans la base $\mathscr{B}$.
  Autrement dit : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}', \mathscr{B}}(\mathrm{Id}) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.
- **Propriétés élémentaires :**
  $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est une matrice inversible, d'inverse $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ : $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$.
- **Propriété (formule de changement de base pour les vecteurs) :**
  Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors $X = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} X'$
- **Propriété (formule de changement de base pour les applications) :**
  Si $E, F$ sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions non nulles $p$ et $n$ respectivement. On considère $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ deux bases de $E$ et $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ deux bases de $F$ ; on note $P = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q = P_{\mathscr{F}}^{\mathscr{F}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ; si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}, \mathscr{F}} f$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}', \mathscr{F}'} f$, alors on a $M' = Q^{-1} M P$.

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{E}) \arrow[r, "f", "M"'] & (F,\mathscr{F}) \\
(E,\mathscr{E}') \arrow[u, "\mathrm{Id}_E", "P"'] \arrow[r, "f", "M'"'] & (F,\mathscr{F}') \arrow[u, "\mathrm{Id}_F", "Q"']
\end{tikzcd}$$

- **Corollaire (cas particulier d'un endomorphisme) :**
  Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on prend $\mathscr{E} = \mathscr{F}$ et $\mathscr{E}' = \mathscr{F}'$ ; si on note $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}} f$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'} f$, alors $M' = P^{-1} M P$.
- **Définition (rang d'une matrice) :**
  Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire canoniquement associée.
- **Propriété :** Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(PAQ)$.
- **Propriété :** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ; il y a équivalence entre :
  - $M$ est inversible.
  - L'application linéaire canoniquement associée à $M$ est bijective.
  - $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad MN = I_n$.
  - $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad NM = I_n$.
  - Toute application linéaire dont la matrice d'une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$ vers une base $\mathcal{F}$ est égale à $M$ est bijective.
  - $M \underset{L}{\sim} I_n$.
  - $\mathbf{rg}(M) = n$.
  - $M$ est une matrice de passage entre deux bases.
  - Pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, il existe une base $\mathcal{E}$ telle que $M = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$.
  - Pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, il existe une base $\mathcal{F}$ telle que $M = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$.
- **Exercice (réduction du rang) :**
  Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang $r$, alors il existe deux matrices $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = QJ_rP$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- **Définition (opérations élémentaires) :**
  Rappel sur les opérations élémentaires et leurs matrices associées.
- **Corollaire :** Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbf{rg} A = \mathbf{rg}(A^T)$.
- **Application :** Calcul de l'inverse d'une matrice.

# Chapitre 19 Déterminants

## ■ Déterminant d'une famille de vecteurs :

- **Définition :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ et $\mathcal{E}$ une base de $E$.
  Il existe une unique application $f \ : \ E^n \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
  - $f$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables ;
  - $f$ est alternée ;
  - $f(\mathcal{E}) = 1$.

  On notera $\det_{\mathcal{E}}$ cette fonction.
- **Propriété :** Avec les notations précédentes, si $f \ : E^n \to \mathbb{K}$ est linéaire par rapport à chaque variable et alternée, alors elle est un multiple de $\det_{\mathcal{E}}$.
- **Exemple :** Cas particuliers en dimension 2 et 3, expression dans un base en fonction des coordonnées ; interprétation comme une aire / un volume orienté(e).
- **Propriété :** La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

## ■ Déterminant d'un endomorphisme :

- **Définition / propriété :** Si $\varphi$ est un endomorphisme de $E$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie, on le note $\det(\varphi)$.
- **Propriétés :** on peut traduire les propriétés opératoires des déterminants matriciels pour les déterminants d'endomorphismes.

## ■ Déterminant d'une matrice carrée :

- **Propriété :** Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ le déterminant dans la base canonique de l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.
- **Propriété :** Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.
- **Propriété :** $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- **Propriété :** Effet des opérations de pivot en colonnes sur un déterminant ; application au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.
- **Propriété :** Une matrice carrée $A$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- **Propriété :** Le déterminant d'un produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le produit des déterminants.
- **Propriété :** Le déterminant d'une matrice et de sa transposée sont égales.
- **Définition :** Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
- **Propriétés :** formules de développement par rapport à une ligne ou à une colonne.
- **Propriété :** Déterminant d'une matrice triangulaire.
- **Exercice :** Déterminant de la matrice de Vandermonde.

# Chapitre 20 Intégration sur un segment

## ■ Construction, Présentation, Premières propriétés (polycopié) :

- **Définition (subdivision d'un segment $[a, b]$) :**
- **Définition (fonction continue par morceaux / en escalier) :** Les ensembles sont notés respectivement $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$.
- **Théorème (admis)** :
  Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b])$ (avec $a < b$) alors :
  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists (\varphi_\varepsilon, \psi_\epsilon) \in (\mathscr{E}([a,b]))^2, \varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leqslant \varepsilon$$
- **Propriétés opératoires** pour les fonctions de $\mathcal{CM}([a, b])$ :
  - Linéarité ;
  - Positivité (*corollaire :* croissance de $f \mapsto \int_I f$) ;
  - Relation de Chasles.
- **Inégalité de la moyenne :**
  $$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})^2, \ \left| \int_I fg \right| \leqslant \sup_I |f| \int_I |g|$$
- **Corollaire :** si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $\left| \int_I f \right| \leqslant (b-a) \sup_I |f|$.
- **Propriété :** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $f \geqslant 0$, alors $\int_{[a,b]} f = 0 \implies f = 0$.