



Chapitre 16 Espaces vectoriels

■ Projections, symétries et formes linéaires :

► Définition (projections) :

Si E_1 et E_2 sont deux s.e.v. supplémentaires de E :

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad x = x_1 + x_2$$

L'application $p_1 : x \mapsto x_1$ est un élément de $\mathcal{L}(E)$ qui est appelé *projection sur E_1 parallèlement à E_2* (ou encore *dans la direction de E_2*).

► Proposition : $\text{im}(p_1) = E_1$, $\ker(p_1) = E_2$ et $E_1 = \ker(p_1 - \text{Id}_E)$.

► Définition (projecteurs) :

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $f = f \circ f$, on dit que f est *idempotent* ; on appelle *projecteur* de E tout endomorphisme idempotent de E .



Propriété : projecteurs et projections désignent les mêmes objets.

► Propriété : si $p \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Id}_E - p$ est un projecteur si et seulement si p est un projecteur (on dit qu'il s'agit de projecteurs *associés*).

► Définition (symétries) :

Si E_1 et E_2 sont deux s.e.v. supplémentaires de E :

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad x = x_1 + x_2$$

L'application $s_1 : x \mapsto x_1 - x_2$ est un élément de $\mathcal{L}(E)$ qui est appelé *symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2* (ou encore *dans la direction de E_2*).

■ Familles de vecteurs et applications :

► Si E_1 et E_2 sont deux s.e.v. supplémentaires dans E , si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases respectives de E_1 et E_2 , la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ forme une base de E .

► Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. admettant une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$, soit F un $\mathbb{K}$ -e.v. et $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F .

► Définition : $f \in \mathcal{L}(E)$ est une *involution linéaire* si $f^2 = \text{Id}_E$.

► Proposition : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est une involution linéaire, on note $E_1 = \ker(f - \text{Id}_E)$, $E_2 = \ker(f + \text{Id}_E)$ et f est la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2 .

► Propriété : involutions linéaires et symétries désignent les mêmes objets.

► Remarque (lien projecteurs / symétries) :

Si $E_1 \oplus E_2 = E$, on note s la symétrie par rapport à E_1 dans la direction E_2 et p la projection sur E_1 dans la direction E_2 ; alors $s = 2p - \text{Id}_E$ et on dit que p et s sont associés.

► Définition (Hyperplan) :

Un hyperplan d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E est un s.e.v. H de E dont un supplémentaire dans E est une droite vectorielle (i.e. : est engendré par un vecteur). Dans ce cas, tous les supplémentaires de H dans E sont des droites vectorielles.

► Définition (formes linéaires) :

On appelle *forme linéaire* un élément de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$; son noyau est appelé *hyperplan associé*.



Propriété : Un s.e.v. H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle u telle que $\ker(u) = H$.

Il existe une unique application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I, \varphi(e_i) = f_i$.

De plus φ est injective ssi $(f_i)_{i \in I}$ est libre ; φ est surjective ssi $(f_i)_{i \in I}$ est génératrice dans F ; φ est bijective ssi $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F .

Chapitre 17 Espaces vectoriels de dimension finie

■ Notion de Dimension :

► Définition : On dit qu'un $\mathbb{K}$ -e.v. est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ s'il admet une famille génératrice finie.



► Lemme (d'échange) :

Si E possède une base de cardinal n , toute famille de vecteurs infinie ou de cardinal supérieur ou égal à $n + 1$, est liée.

► Corollaire (équicardinalité des bases) :

Si E admet une base finie de cardinal n , alors toutes les bases ont pour cardinal n .

On note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ce cardinal commun ($\dim(E)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté).

► Exemples : $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X])$.

► Propriété : On peut revenir sur l'équivalence libre maximale – génératrice minimale – base dans le cadre d'un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie : Si E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n et si $(e_1, \dots, e_k)$ est une famille de vecteurs de E :

- Si $k > n$, la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est liée.

- Si $k < n$, $(e_1, \dots, e_k)$ n'est jamais génératrice.

- Si $k = n$, $(e_1, \dots, e_k)$ base ssi libre ssi génératrice.

► Corollaire : Dans un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n , pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base il suffit de montrer qu'elle est libre (ou bien qu'elle est génératrice).

► Corollaire : Si E est de dimension finie et qu'il existe un isomorphisme entre E et F , alors F est de dimension finie, égale à celle de E .



► Théorème (théorème de la base incomplète) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, si $\mathcal{L}$ est une famille libre de vecteurs de E et si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice dans E , il existe une sous-famille $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}'$ soit une base de E .

► Corollaire : De toute famille génératrice on peut extraire une base ; en particulier, un $\mathbb{K}$ -e.v. est de dimension finie ssi il admet une base de cardinal fini.

► Propriété : Soit F un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E de dimension n alors : F est de dimension finie p , et $p \leq n$.

■ Notion de Rang :

► Définition (rang d'une famille de vecteurs) :

Si $(u_1, \dots, u_p)$ sont des vecteurs de E , on appelle *rang* de la famille et on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ la dimension de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

► Propriétés élémentaires :

- $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \text{rg}(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

- $\text{rg}(\lambda u_1, \dots, \lambda u_p) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ pour $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

► Corollaire : Si E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et F un s.e.v. de E , $F = E$ ssi $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

► Propriété (existence et dimension d'un supplémentaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie ; tout s.e.v. de E admet un supplémentaire G . De plus, $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$.

► Vocabulaire : les s.e.v. de dimension 1 sont les *droites vectorielles*, ceux de dimension $\dim_{\mathbb{K}}(E) - 1$ sont les *hyperplans*.

► Propriété : Si E est un $\mathbb{K}$ -e.v. quelconque *a priori* et si F et G sont deux s.e.v. de E supplémentaires et de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$.

► Propriété (formule de Grassmann) :

Soit E_1 et E_2 sont deux s.e.v. de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E , alors :

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2)$$

► Corollaire (caractérisation des supplémentaires en dimension finie) :

Soit E_1 et E_2 deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Il y a équivalence entre :

- $E_1 \oplus E_2 = E$

- $E_1 + E_2 = E$ et $\dim_{\mathbb{K}}(E_1) + \dim_{\mathbb{K}}(E_2) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$

- $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $\dim_{\mathbb{K}}(E_1) + \dim_{\mathbb{K}}(E_2) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$

► Propriété : Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies, $E \times F$ également et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies alors leur produit

$$\text{aussi et } \dim_{\mathbb{K}}\left(\prod_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(E_k).$$

► Corollaire : Tout $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

► Propriété : Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies, $\mathcal{L}(E, F)$ également et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}(E, F)) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

$$\text{rg}\left(u_1 + \sum_{k=2}^p \lambda_k u_k, u_2, \dots, u_p\right) = \text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \quad \text{si}$$

$$(\lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}.$$

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p, 0_E).$$

► Définition (rang d'une application linéaire) :

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\text{im} f$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, on appelle

rang de f et on note $\text{rg} f$, la dimension de $\text{im} f$.

- **Propriété :** Si E est de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E , alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.
- **Propriété :** Si E et F sont de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\text{rg} f \leq \min(\dim E, \dim F)$.
- **Propriété (caractérisations de la surjectivité et de l'injectivité) :** Si E et F sont de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\text{rg}(f) = \dim F$ ssi f est surjective sur F , $\text{rg}(f) = \dim E$ ssi f est injective.
- **Propriété :** Si E et F sont de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il y a équivalence entre :
 - $f \in \text{Isom}(E, F)$
 - L'image de toute base de E est une base de F .
 - L'image d'une base de E est une base de F
- **Propriété :** Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et si l'une de ces applica-

tions est de rang fini, alors $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg} f, \text{rg} g)$. En particulier, si g est bijective $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$ et si f est bijective $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.

Théorème (théorème du rang) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et F un $\mathbb{K}$ -e.v. quelconque, alors :

$$\dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

(ou encore $\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\ker(f))$).

- **Théorème :** Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -e.v. de même dimension n , et si f est une application linéaire de E dans F , on a équivalence entre :

• f est injective • f est surjective • f est bijective	• $\text{rg}(f) = n$ • f est inversible à droite • f est inversible à gauche
---	---

Chapitre 18 Matrices – Applications linéaires

■ Définitions - Vocabulaire :

- **Propriété (lien avec les applications linéaires) :** Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies p et n respectivement, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ sont des bases de E et F ; on note m_{ij} les composantes des images des vecteurs de la base $\mathcal{E}$ par u : $\forall j \in 1, p, \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i$.
- On dit que $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = (m_{ij})_{i \in 1, n, j \in 1, p}$ est la *matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$* .
- **Propriété :** $\phi_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} u \end{cases}$ est un isomorphisme.

Exercice :

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions p et n (non nulles) et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire de rang r , alors il existe des bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de E et F telles que la matrice associée soit : $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Propriété :** Le produit matriciel est bilinéaire, associatif. Le produit de matrices carrées d'ordre n est non commutatif si $n > 1$.
- **Rappel :** Cas particulier du produit des matrices élémentaires.
- **Propriété :** Une matrice est inversible si et seulement si elle admet un inverse à gauche, si et seulement si elle admet un inverse à droite.
- **Propriété :** Stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par produit; l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.
- **Définition :** Transposée d'une matrice M ; notation ${}^t M$ (ou M^T).
- **Propriétés élémentaires :** $(AB)^T, (M^T)^T$.
- **Propriété :** $\phi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M \mapsto M^T \end{cases}$ est un isomorphisme.
- **Définition :** Ensembles des matrices symétriques et antisymétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- **Exercice :** Notion de matrice définie par bloc et de produit par blocs.

■ Interprétation matricielle d'une application linéaire - notion de rang :

- **Définition :** Matrice d'un vecteur relativement à une base. Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases.
- **Définition :** Matrice associée à une famille de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$.
- **Définition (matrice de passage entre deux bases) :** Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base; si $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ est une autre base de E , on note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$* . Il s'agit de la matrice dont le j -ème vecteur colonne représente les composante de e'_j dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit : $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
- **Propriétés élémentaires :** $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est une matrice inversible, d'inverse $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$: $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.
- **Propriété (formule de changement de base pour les vecteurs) :** Si $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, alors $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$

Propriété (formule de changement de base pour les applications) :

Si E, F sont deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions non nulles p et n respectivement. On considère $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux bases de F ; on note $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$; si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si on note $M = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} f$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'} f$, alors on a $M' = Q^{-1} M P$.

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{E}) & \xrightarrow{f} & (F, \mathcal{F}) \\ \text{Id}_E \uparrow P & M & \uparrow \text{Id}_F Q \\ (E, \mathcal{E}') & \xrightarrow{f} & (F, \mathcal{F}') \\ & M' & \end{array}$$

- **Corollaire (cas particulier d'un endomorphisme) :** Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on prend $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ et $\mathcal{E}' = \mathcal{F}'$; si on note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'} f$, alors $M' = P^{-1} M P$.
- **Définition (rang d'une matrice) :** Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire canoniquement associée.

Propriété : Si $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(PAQ)$.

- **Propriété :** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; il y a équivalence entre :
 - M est inversible.
 - L'application linéaire canoniquement associée à M est bijective.
 - $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad MN = I_n$.
 - $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad NM = I_n$.
 - Toute application linéaire dont la matrice d'une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$ vers une base $\mathcal{F}$ est égale à M est bijective.
 - $M \sim_L I_n$.
 - $\text{rg}(M) = n$.
 - M est une matrice de passage entre deux bases.
 - Pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, il existe une base $\mathcal{E}$ telle que $M = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$.
 - Pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, il existe une base $\mathcal{F}$ telle que $M = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$.
- **Exercice (réduction du rang) :** Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang r , alors il existe deux matrices $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = Q J_r P$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- **Définition (opérations élémentaires) :** Rappel sur les opérations élémentaires et leurs matrices associées.
- **Corollaire :** Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\text{rg} A = \text{rg}(A^T)$.
- **Application :** Calcul de l'inverse d'une matrice.

Chapitre 19 Déterminants

■ Déterminant d'une famille de vecteurs :

- **Définition :** Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $\mathcal{E}$ une base de E . Il existe une unique application $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
 - f est linéaire par rapport à chacune de ses variables;
 - f est alternée;
 - $f(\mathcal{E}) = 1$.
 On notera $\det_{\mathcal{E}}$ cette fonction.
- **Propriété :** Avec les notations précédentes, si $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire

par rapport à chaque variable et alternée, alors elle est un multiple de $\det_{\mathcal{E}}$.

- **Exemple :** Cas particuliers en dimension 2 et 3, expression dans un base en fonction des coordonnées; interprétation comme une aire / un volume orienté(e).
- **Propriété :** La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.