Semaine 25

lundi 28 avril 2025
> samedi 3 mai 2025

Chapitre 16 Espaces vectoriels

Combinaisons linéaires, Caractère libre, lié, générateur :

- **Définition :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs et $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires *presque nulle* (c'est à dire qu'ils sont tous nuls sauf éventuellement un nombre fini) ; on définit la *combinaison linéaire des x_i de coefficients λ_i* par : $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$ (la somme ne porte que sur l'ensemble *fini* des indices tels que $\lambda_i \neq 0$).
- **Définition (caractère libre) :** $(x_i)_{i\in I}$ est une famille *libre* si toute pour toute combinaison linéaire :
$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i\in I,\quad \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$
Dans le cas contraire, on dit que la famille est *liée*.
- **Premières propriétés :**
  - La famille vide est libre.
  - Une famille à un seul élément est libre si et seulement si cet élément est non nul.
  - Si 0_E est un élément d'une famille, elle est liée.
  - Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.
  - Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
  - Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
  - Si $\sigma : I \to I$ est une bijection, $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est libre.
- **Définition (familles étagées/échelonnées) :** Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux familles de vecteurs de E. On dit que $(y_1, \ldots, y_n)$ est *étagée* (ou *échelonnée*) par rapport à $(x_1, \ldots, x_n)$ ssi il existe des scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant i}}$ tels que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $y_k = \sum_{j=1}^{k}\lambda_{k,\,j}x_j$, avec de plus, $\forall i\in [\![1, n]\!]$, $\lambda_{i,\,i}\neq 0$.
- **Propriété :** Si une famille $\mathcal{F}_1$ est échelonnée par rapport à une famille $\mathcal{F}_2$, alors la famille $\mathcal{F}_2$ est échelonnée par rapport à $\mathcal{F}_1$.
- **Propriété :** Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre et si $(y_1, \ldots, y_n)$ est étagée par rapport à $(x_1, \ldots, x_n)$ alors $(y_1, \ldots, y_n)$ est libre.
- **Définition (famille génératrice) :** Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est *génératrice* si et seulement si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$.
- **Premières propriétés :**
  - Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
  - Si $\sigma : I\to I$ est une bijection, $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est génératrice.
- **Propriété :** Une famille échelonnée par rapport à une famille génératrice est génératrice.
- **Définition (base) :** Une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice.
- **Propriété :** Si B est une base de E, tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de B.
- **Propriétés :**
  - Si $\sigma : I\to I$ est une bijection, $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est génératrice.
  - Une famille échelonnée par rapport à une base est une base.
- **Théorème :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E ; les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
  - $(x_i)_{i\in I}$ est une base ;
  - $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale au sens de l'inclusion ;
  - $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale au sens de l'inclusion.

Remarque : on ne parle pas de cardinal ou de dimension finie ici !

Sous-espaces vectoriels :

- **Définition (sous-espace vectoriel) :** Il s'agit d'une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-e.v. E qui est stable par combinaison linéaire.
- **Propriété :** Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev est un $\mathbb{K}$-ev.
- **Propriété :** Toute intersection (finie ou non) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- **Remarque :** Il n'existe pas de telle propriété pour la réunion de s-e.v. ! Par contre, on a montré en exercice que l'union de deux s-e.v. était encore un s-e.v. si et seulement si l'un était inclus dans l'autre.
- **Définition (sous-espace vectoriel engendré) :** Soit A une partie de E ; l'intersection de tous les s-e.v. de E contenant A est notée $\mathbf{Vect}(A)$.
- **Propriété :** $\mathbf{Vect}(A)$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.

Applications linéaires :

- **Définition (applications linéaires) :** Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E\to F$; on dit que f est une application linéaire ssi :
$$\forall (x,\,y)\in E^2,\qquad f(x+y) = f(x)+f(y)$$
$$\forall (\lambda,\,x)\in \mathbb{K}\times E,\qquad f(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot f(x)$$
On note $\mathscr{L}(E,\,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- **Vocabulaire :**
  - Un *isomorphisme* de E dans F est une application linéaire bijective de E sur F ; on note $\mathrm{Isom}(E,\,F)$ l'ensemble des isomorphismes.
  - Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans lui-même ; on note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
  - Enfin, un *automorphisme* de E est un endomorphisme bijectif de E ; on note $\mathrm{Aut}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- **Propriétés :**
  - L'image d'une famille liée par une application linéaire est une famille liée.
  - L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.
  - L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.
- **Définition (image et noyau d'une application linéaire) :** Si $f\in\mathscr{L}(E,\,F)$, on définit : $\begin{cases}\mathbf{im}(f) = \{f(x),\quad x\in E\}\\ \mathbf{ker}(f) = \{x\in E\ /\quad f(x) = 0_F\}\end{cases}$
- **Propriété :** L'image directe d'un s-e.v. de E par $f\in\mathscr{L}(E,\,F)$ est un s-e.v. de F. L'image réciproque (ensembliste) d'un s-e.v. de F par f est un s-e.v. de E. En particulier $\mathbf{ker}(f)$ et $\mathbf{im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.
- **Propriété (caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité) :** $f\in\mathscr{L}(E,\,F)$ est injective ssi $\mathbf{ker}(f) = \{0_E\}$; elle est surjective ssi $\mathbf{im}(f) = F$.
- **Propriété :**
Si $h\in\mathscr{L}(F,\,G)$, ψ_h : $\left|\begin{array}{l}\mathscr{L}(E,\,F)\to\mathscr{L}(E,\,G)\\ \quad f\mapsto h\circ f\end{array}\right.$ est linéaire.
Si $g\in\mathscr{L}(A,\,E)$, ϕ_g : $\left|\begin{array}{l}\mathscr{L}(E,\,F)\to\mathscr{L}(A,\,F)\\ \quad f\mapsto f\circ g\end{array}\right.$ est linéaire.
- **Définition ($\mathbb{K}$-algèbre) :** (quelques idées)...
- **Propriété :** Si E est un $\mathbb{K}$-ev, $\mathscr{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
- **Définition (groupe linéaire) :** On appelle groupe linéaire et on note $GL(E)$ (avec E un $\mathbb{K}$-ev) l'ensemble des automorphismes de E muni de la loi de composition : $\big(\mathrm{Aut}(E),\,\circ\big)$.
En particulier, si $f\in\mathrm{Isom}(E,\,F)$, sa bijection réciproque est un élément de $\mathrm{Isom}(F,\,E)$.

Sommes directes et applications linéaires :

- **Définition :** Si E est un $\mathbb{K}$–e.v. et E_1 et E_2 deux s-e.v. de E, on appelle *somme de E_1 et E_2* et on note E_1+E_2 le s-e.v. de E défini par :
$$E_1+E_2 = \{e_1+e_2,\quad (e_1,\,e_2)\in E_1\times E_2\}$$
- **Propriété :** $E_1+E_2 = \mathbf{Vect}(E_1\cup E_2)$.
- **Définition (somme directe de deux s-e.v.) :** La somme E_1+E_2 est *directe* si on a *de plus* $E_1\cap E_2 = \{0_E\}$; on note alors $E_1+E_2 = E_1\bigoplus E_2$.
- **Remarque :** La définition donnée ici n'est pas généralisable pour plus de deux s-e.v....
- **Propriété :** E_1 et E_2 sont en somme directe ssi tout élément de E_1+E_2 s'écrit de façon *unique* comme somme d'un élément de E_1 et d'un

élément de E_2 (*cette fois par contre, la propriété est généralisable, mais c'est hors programme cette année...*).

- **Exercice :** E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\varphi : \left| \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \to E \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
- **Définition :** Si E est $\mathbb{K}$-e.v. et si E_1 et E_2 sont deux s-e.v. de E, on dit que E_1 et E_2 sont *supplémentaires dans* E si $E_1 \bigoplus E_2 = E$ (autrement dit $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $E_1 + E_2 = E$).
- **Propriété (définition par restriction à des s-e.v. supplémentaires) :** Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. et E_1 et E_2 deux s-e.v. *supplémentaires* de E ; étant donné $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f\,\big|_{E_1} = f_1$ et $f\,\big|_{E_2} = f_2$.
- **Exemples :** Pour des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ définis par leurs restrictions à des s-e.v. supplémentaires : premières projections et symétries du plan et de l'espace.
- **Propriété (caractérisation des images et des noyaux de fonctions linéaires construites au moyen d'une somme directe) :** Si E_1 et E_2 sont *deux s-e.v. supplémentaires* et si $f\,\big|_{E_1} = f_1$ et $f\,\big|_{E_2} = f_2$, on a : $\begin{cases} \mathbf{ker}(f_1) + \mathbf{ker}(f_2) \subset \mathbf{ker}(f) \\ \mathbf{im}(f_1) + \mathbf{im}(f_2 = \mathbf{im}(f) \end{cases}$
- **Propriété :** Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si H est un s-e.v. de E, on note $g = f\,\big|_H$; alors $\mathbf{ker}(g) = H \cap \mathbf{ker}(f)$.
- **Corollaire :** En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathbf{im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathbf{ker}(f)$.

Projections, symétries et formes linéaires :

- **Définition (projections) :** Si E_1 et E_2 sont deux s-e.v. supplémentaires de E :
$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad x = x_1 + x_2$$
L'application $p_1 : x \mapsto x_1$ est un élément de $\mathscr{L}(E)$ qui est appelé *projection sur* E_1 *parallèlement à* E_2 (ou encore *dans la direction de* E_2).
- **Proposition :** $\mathbf{im}(p_1) = E_1$, $\mathbf{ker}(p_1) = E_2$ et $E_1 = \mathbf{ker}(p_1 - \mathrm{Id}_E)$.
- **Définition (projecteurs) :** Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $f = f \circ f$, on dit que f est *idempotent* ; on appelle *projecteur* de E tout endomorphisme idempotent de E.
- **Propriété :** projecteurs et projections désignent les mêmes objets.
- **Propriété :** si $p \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur si et seulement si p est un projecteur (on dit qu'il s'agit de projecteurs *associés*).
- **Définition (symétries) :** Si E_1 et E_2 sont deux s-e.v. supplémentaires de E :
$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad x = x_1 + x_2$$
L'application $s_1 : x \mapsto x_1 - x_2$ est un élément de $\mathscr{L}(E)$ qui est appelé *symétrie par rapport à* E_1 *parallèlement à* E_2 (ou encore *dans la direction de* E_2).
- **Définition :** $f \in \mathscr{L}(E)$ est une *involution linéaire* si $f^2 = \mathrm{Id}_E$.
- **Proposition :** Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est une involution linéaire, on note $E_1 = \mathbf{ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $E_2 = \mathbf{ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ et f est la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2.
- **Propriété :** involutions linéaires et symétries désignent les mêmes objets.
- **Remarque (lien projecteurs / symétries) :** Si $E_1 \oplus E_2 = E$, on note s la symétrie par rapport à E_1 dans la direction E_2 et p la projection sur E_1 dans la direction E_2 ; alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et on dit que p et s sont associés.
- **Définition (Hyperplan) :** Un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est un s-e.v. H de E dont un supplémentaire dans E est une droite vectorielle (*i.e.* : est engendré par un vecteur). Dans ce cas, tous les supplémentaires de H dans E sont des droites vectorielles.
- **Définition (formes linéaires) :** On appelle *forme linéaire* un élément de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$; son noyau est appelé *hyperplan associé*.
- **Propriété :** Un s-e.v. H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle u telle que $\mathbf{ker}(u) = H$.

Familles de vecteurs et applications :

- Si E_1 et E_2 sont deux s-e.v. supplémentaires dans E, si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases respectives de E_1 et E_2, la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ forme une base de E.
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. admettant une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$, soit F un $\mathbb{K}$-e.v. et $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I, \quad \varphi(e_i) = f_i$.
De plus φ est injective ssi $(f_i)_{i \in I}$ est libre ; φ est surjective ssi $(f_i)_{i \in I}$ est génératrice dans F ; φ est bijective ssi $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F.

Chapitre 17 Espaces vectoriels de dimension finie

Notion de Dimension :

- **Définition :** On dit qu'un $\mathbb{K}$-e.v. est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ s'il admet une famille génératrice finie.
- **Lemme (d'échange) :** Si E possède une base de cardinal n, toute famille de vecteurs infinie ou de cardinal supérieur ou égal à $n+1$, est liée.
- **Corollaire (équicardinalité des bases) :** Si E admet une base finie de cardinal n, alors toutes les bases ont pour cardinal n.
On note $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E)$ ce cardinal commun ($\mathbf{dim}(E)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté).
- **Exemples :** $\mathbf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, $\mathbf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X])$.
- **Propriété :** On peut revenir sur l'*équivalence libre maximale – génératrice minimale – base* dans le cadre d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie : Si E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une famille de vecteurs de E :
  - Si $k > n$, la famille $(e_1, \ldots, e_k)$ est liée.
  - Si $k < n$, $(e_1, \ldots, e_k)$ n'est jamais génératrice.
  - Si $k = n$, $(e_1, \ldots, e_k)$ base ssi libre ssi génératrice.
- **Corollaire :** Dans un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base il suffit de montrer qu'elle est libre (ou bien qu'elle est génératrice).
- **Corollaire :** Si E est de dimension finie et qu'il existe un isomorphisme entre E et F, alors F est de dimension finie, égale à celle de E.
- **Théorème (théorème de la base incomplète) :** Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, si $\mathcal{L}$ est une famille libre de vecteurs de E et si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice dans E, il existe une sous-famille $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}'$ soit une base de E.
- **Corollaire :** De toute famille génératrice on peut extraire une base ; en particulier, un $\mathbb{K}$-e.v. est de dimension finie ssi il admet une base de cardinal fini.
- **Propriété :** Soit F un s-e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension n alors : F est de dimension finie p, et $p \leqslant n$.
- **Corollaire :** Si E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et F un s-e.v. de E, $F = E$ ssi $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(F) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E)$.
- **Propriété (existence et dimension d'un supplémentaire) :** Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie ; tout s-e.v. de E admet un supplémentaire G. De plus, $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(F) + \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(G)$.
- **Vocabulaire :** les s-e.v. de dimension 1 sont les *droites vectorielles*, ceux de dimension $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E) - 1$ sont les *hyperplans*.
- **Propriété :** Si E est un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque *a priori* et si F et G sont deux s-e.v. de E supplémentaires et de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(F) + \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(G)$.
- **Propriété (formule de Grassmann) :** Si E_1 et E_2 sont deux s-e.v. de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-e.v. E, alors :
$$\mathbf{dim}(E_1) + \mathbf{dim}(E_2) = \mathbf{dim}(E_1 \cap E_2) + \mathbf{dim}(E_1 + E_2)$$
- **Corollaire (caractérisation des supplémentaires en dimension finie) :** Soit E_1 et E_2 deux s-e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Il y a équivalence entre :
  - $E_1 \oplus E_2 = E$
  - $E_1 + E_2 = E$ et $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E_1) + \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E_2) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E)$
  - $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $\mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E_1) + \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E_2) = \mathbf{dim}_{\mathbb{K}}(E)$
- **Propriété :** Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies, $E \times F$ également et $\mathbf{dim}(E \times F) = \mathbf{dim}(E) + \mathbf{dim}(F)$.