Semaine 24

lundi 07 avril 2025
> samedi 12 avril 2025

Chapitre 16 Espaces vectoriels

Définitions, Généralités, Exemples :

- **Définition :**
Si $\mathbb{K}$ est un corps ; on dit que $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (en abrégé $\mathbb{K}$-e.v.) si :
  - (E est non vide)
  - E est muni d'une loi de composition interne $+$ telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif d'élément neutre 0_E.
  - $\bullet$ est une loi de composition externe : $\bullet$: $\left| \begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \bullet x \end{array} \right.$.
  - Si on a les propriétés suivantes : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \bullet x = \lambda \bullet x + \mu \bullet x$;
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $\lambda \bullet (x + y) = \lambda \bullet x + \lambda \bullet y$;
$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda \bullet (\mu \bullet x) = (\lambda\mu) \bullet x$;
$\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \bullet x = x$
- **Vocabulaire :** On appelle E l'ensemble des *vecteurs*, $\mathbb{K}$ l'ensemble des *scalaires*.
- **Propriété :** $\lambda \cdot x = 0_E \iff x = 0_E$ ou $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$.
- **Exemples :**
  - $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ sont des $\mathbb{R}$-ev.
  - $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-ev mais aussi un $\mathbb{R}$-ev.
  - $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev, $(\mathbb{C}_n[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-ev.
  - $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev.
  - $(\{f \text{ admettant un } DL_n(a)\}, +, \cdots)$ est un $\mathbb{R}$-ev.
- **Propriétés :**
  - Si $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ sont deux $\mathbb{K}$-e.v., on peut munir leur produit cartésien $E_1 \times E_2$ d'une structure de $\mathbb{K}$-e.v.
  - Si X est un ensemble quelconque et si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., l'ensemble des fonctions de X dans E, E^X peut également être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-e.v.

Combinaisons linéaires, Caractère libre, lié, générateur :

- **Définition :** Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs et $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires *presque nulle* (c'est à dire qu'ils sont tous nuls sauf éventuellement un nombre fini) ; on définit la *combinaison linéaire des x_i de coefficients λ_i* par : $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ (la somme ne porte que sur l'ensemble *fini* des indices tels que $\lambda_i \neq 0$).
- **Définition (caractère libre) :**
$(x_i)_{i \in I}$ est une famille *libre* si toute pour toute combinaison linéaire :
$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \quad \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$
Dans le cas contraire, on dit que la famille est *liée*.
- **Premières propriétés :**
  - La famille vide est libre.
  - Une famille à un seul élément est libre si et seulement si cet élément est non nul.
  - Si 0_E est un élément d'une famille, elle est liée.
  - Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.
  - Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
  - Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
  - Si $\sigma : I \to I$ est une bijection, $(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est libre.
- **Définition (familles étagées/échelonnées) :**
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux familles de vecteurs de E. On dit que $(y_1, \ldots, y_n)$ est *étagée* (ou *échelonnée*) par rapport à $(x_1, \ldots, x_n)$ ssi il existe des scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant i}}$ tels que : $\forall k \in$ 1, n, $y_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{k,j} x_j$, avec de plus, $\forall i \in$ 1, n, $\lambda_{i,i} \neq 0$.
- **Propriété :**
Si une famille $\mathcal{F}_1$ est échelonnée par rapport à une famille $\mathcal{F}_2$, alors la famille $\mathcal{F}_2$ est échelonnée par rapport à $\mathcal{F}_1$.
- **Propriété :**
Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre et si $(y_1, \ldots, y_n)$ est étagée par rapport à $(x_1, \ldots, x_n)$ alors $(y_1, \ldots, y_n)$ est libre.
- **Définition (famille génératrice) :**
Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est *génératrice* si et seulement si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$.
- **Premières propriétés :**
  - Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
  - Si $\sigma : I \to I$ est une bijection, $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est génératrice.
- **Propriété :**
Une famille échelonnée par rapport à une famille génératrice est génératrice.
- **Définition (base) :**
Une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice.
- **Propriété :** Si B est une base de E, tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de B.
- **Propriétés :**
  - Si $\sigma : I \to I$ est une bijection, $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est génératrice.
  - Une famille échelonnée par rapport à une base est une base.
- **Théorème :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E ; les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
  - $(x_i)_{i \in I}$ est une base ;
  - $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale au sens de l'inclusion ;
  - $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre maximale au sens de l'inclusion.

Remarque : on ne parle pas de cardinal ou de dimension finie ici !

Sous-espaces vectoriels :

- **Définition (sous-espace vectoriel) :**
Il s'agit d'une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-e.v. E qui est stable par combinaison linéaire.
- **Propriété :** Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev est un $\mathbb{K}$-ev.
- **Propriété :** Toute intersection (finie ou non) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- **Remarque :** Il n'existe pas de telle propriété pour la réunion de s-e.v. ! Par contre, on a montré en exercice que l'union de deux s-e.v. était encore un s-e.v. si et seulement si l'un était inclus dans l'autre.
- **Définition (sous-espace vectoriel engendré) :**
Soit A une partie de E ; l'intersection de tous les s-e.v. de E contenant A est notée $\mathbf{Vect}(A)$.
- **Propriété :**
$\mathbf{Vect}(A)$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.

Applications linéaires :

- **Définition (applications linéaires) :**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$; on dit que f est une application linéaire ssi :
$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \qquad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$
On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- **Vocabulaire :**
  - Un *isomorphisme* de E dans F est une application linéaire bijective de E sur F ; on note $\mathrm{Isom}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes.
  - Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans lui-même ; on note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
  - Enfin, un *automorphisme* de E est un endomorphisme bijectif de E ; on note $\mathrm{Aut}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- **Propriétés :**
  - L'image d'une famille liée par une application linéaire est une famille liée.
  - L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.
  - L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.
- **Définition (image et noyau d'une application linéaire) :**
Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on définit : $\begin{cases} \mathbf{im}(f) = \{f(x), \quad x \in E\} \\ \mathbf{ker}(f) = \{x \in E \ / \quad f(x) = 0_F\} \end{cases}$

Propriété : L'image directe d'un s-e.v. de E par $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un s-e.v. de F.
L'image réciproque (ensembliste) d'un s-e.v. de F par f est un s-e.v. de E.
En particulier $\mathbf{ker}(f)$ et $\mathbf{im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.

- **Propriété (caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité) :**
  $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective ssi $\mathbf{ker}(f) = \{0_E\}$; elle est surjective ssi $\mathbf{im}(f) = F$.

Propriété :

Si $h \in \mathscr{L}(F, G)$, ψ_h : $\left|\begin{array}{l}\mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(E, G) \\ f \mapsto h \circ f\end{array}\right.$ est linéaire.

Si $g \in \mathscr{L}(A, E)$, ϕ_g : $\left|\begin{array}{l}\mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(A, F) \\ f \mapsto f \circ g\end{array}\right.$ est linéaire.

- **Définition ($\mathbb{K}$-algèbre) :** (quelques idées)...
- **Propriété :**
  Si E est un $\mathbb{K}$-ev, $\mathscr{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
- **Définition (groupe linéaire) :**
  On appelle groupe linéaire et on note $GL(E)$ (avec E un $\mathbb{K}$-ev) l'ensemble des automorphismes de E muni de la loi de composition : $\left(\mathrm{Aut}(E), \circ\right)$.
  En particulier, si $f \in \mathrm{Isom}(E, F)$, sa bijection réciproque est un élément de $\mathrm{Isom}(F, E)$.

Sommes directes et applications linéaires :

- **Définition :** Si E est un $\mathbb{K}$–e.v. et E_1 et E_2 deux s-e.v. de E, on appelle *somme de E_1 et E_2* et on note $E_1 + E_2$ le s-e.v. de E défini par :
$$E_1 + E_2 = \{e_1 + e_2, \quad (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2\}$$
- **Propriété :** $E_1 + E_2 = \mathbf{Vect}(E_1 \cup E_2)$.
- **Définition (somme directe de deux s-e.v.) :**
  La somme $E_1 + E_2$ est *directe* si on a *de plus* $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$; on note alors $E_1 + E_2 = E_1 \bigoplus E_2$.
- **Remarque :** La définition donnée ici n'est pas généralisable pour plus de deux s-e.v....
- **Propriété :** E_1 et E_2 sont en somme directe ssi tout élément de $E_1 + E_2$ s'écrit de façon *unique* comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 (*cette fois par contre, la propriété est généralisable, mais c'est hors programme cette année...*).

Exercice : E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si φ : $\left|\begin{array}{l}E_1 \times E_2 \to E \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2\end{array}\right.$ est un isomorphisme.

- **Définition :** Si E est $\mathbb{K}$-e.v. et si E_1 et E_2 sont deux s-e.v. de E, on dit que E_1 et E_2 sont *supplémentaires dans* E si $E_1 \bigoplus E_2 = E$ (autrement dit $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $E_1 + E_2 = E$).

Propriété (définition par restriction à des s-e.v. supplémentaires) :
Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. et E_1 et E_2 deux s-e.v. *supplémentaires* de E ; étant donné $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f\,|_{E_1} = f_1$ et $f\,|_{E_2} = f_2$.

- **Exemples :** Pour des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ définis par leurs restrictions à des s-e.v. supplémentaires : premières projections et symétries du plan et de l'espace.
- **Propriété (caractérisation des images et des noyaux de fonctions linéaires construites au moyen d'une somme directe) :**
  Si E_1 et E_2 sont *deux s-e.v. supplémentaires* et si $f\,|_{E_1} = f_1$ et $f\,|_{E_2} = f_2$, on a : $\begin{cases}\mathbf{ker}(f_1) + \mathbf{ker}(f_2) \subset \mathbf{ker}(f) \\ \mathbf{im}(f_1) + \mathbf{im}(f_2) = \mathbf{im}(f)\end{cases}$
- **Propriété :** Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si H est un s-e.v. de E, on note $g = f\,|_H$; alors $\mathbf{ker}(g) = H \cap \mathbf{ker}(f)$.
- **Corollaire :** En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathbf{im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathbf{ker}(f)$.

Projections, symétries et formes linéaires :

- **Définition (projections) :**
  Si E_1 et E_2 sont deux s-e.v. supplémentaires de E :
$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad x = x_1 + x_2$$
  L'application $p_1 : x \mapsto x_1$ est un élément de $\mathscr{L}(E)$ qui est appelé *projection sur E_1 parallèlement à E_2* (ou encore *dans la direction de* E_2).
- **Proposition :** $\mathbf{im}(p_1) = E_1$, $\mathbf{ker}(p_1) = E_2$ et $E_1 = \mathbf{ker}(p_1 - \mathrm{Id}_E)$.
- **Définition (projecteurs) :**
  Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $f = f \circ f$, on dit que f est *idempotent* ; on appelle *projecteur* de E tout endomorphisme idempotent de E.

Propriété : projecteurs et projections désignent les mêmes objets.

- **Propriété :** si $p \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur si et seulement si p est un projecteur (on dit qu'il s'agit de projecteurs *associés*).
- **Définition (symétries) :**
  Si E_1 et E_2 sont deux s-e.v. supplémentaires de E :
$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad x = x_1 + x_2$$
  L'application $s_1 : x \mapsto x_1 - x_2$ est un élément de $\mathscr{L}(E)$ qui est appelé *symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2* (ou encore *dans la direction de* E_2).
- **Définition :** $f \in \mathscr{L}(E)$ est une *involution linéaire* si $f^2 = \mathrm{Id}_E$.
- **Proposition :** Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est une involution linéaire, on note $E_1 = \mathbf{ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $E_2 = \mathbf{ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ et f est la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2.
- **Propriété :** involutions linéaires et symétries désignent les mêmes objets.
- **Remarque (lien projecteurs / symétries) :**
  Si $E_1 \oplus E_2 = E$, on note s la symétrie par rapport à E_1 dans la direction E_2 et p la projection sur E_1 dans la direction E_2 ; alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et on dit que p et s sont associés.
- **Définition (Hyperplan) :**
  Un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est un s-e.v. H de E dont un supplémentaire dans E est une droite vectorielle (*i.e.* : est engendré par un vecteur). Dans ce cas, tous les supplémentaires de H dans E sont des droites vectorielles.
- **Définition (formes linéaires) :**
  On appelle *forme linéaire* un élément de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$; son noyau est appelé *hyperplan associé.*