Semaine 23

lundi 31 mars 2025
> samedi 5 avril 2025

Chapitre 15 Développements limités

■ Développements limités :

▶ **Définition (DL à l'ordre n) :**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$; on dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x_0 s'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$f(x) \underset{x=x_0}{=} P_n(x - x_0) + o\Big((x - x_0)^n\Big)$$
C'est-à-dire : $\exists(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists \varepsilon \ : \ V \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{t \to x_0} \varepsilon(t) = 0$ et :
$$\forall x \in V, \quad f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x - x_0)^k\right) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$
On dit que P_n est la *partie régulière* du DL à l'ordre n.

▶ **Propriété (Unicité du développement limité) :**
Lorsqu'il existe, le développement limité en 0 à l'ordre n d'une fonction est unique.

▶ **Définition :** Si f admet un $DL_n(0)$ alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, f admet un $\mathrm{DL}_k(0)$ et sa partie régulière est la « *troncature du $DL_n(0)$ au rang k* ».

▶ **Propriété :** *Lien avec la régularité de f*
On a déjà vu que f est continue en a ssi elle admet un DL d'ordre 0 en a.
f est dérivable en a ssi elle admet un DL d'ordre 1 en a.
On rappelle que cette équivalence n'est pas vraie pour les ordres supérieurs ! (contre-exemple : $x \mapsto x^3 \sin \dfrac{1}{x}$).

▶ **Propriété :**
Si f est une fonction continue sur un voisinage de 0, si $n \in \mathbb{N}$, et si $f(t) \underset{t=0}{=} o(t^n)$, alors, en notant $F \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$, on a : $F(x) \underset{x=0}{=} o(x^{n+1})$.

▶ **Théorème (Formule de Taylor-Young) :**
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, elle admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.
On peut préciser la partie régulière du DL_n :
$f(x) \underset{x=0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o\left(x^n\right)$;

▶ **Exemples (DL usuels v.1.0) :** $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

- $e^x \underset{x=0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha \underset{x=0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.
- $\cos(x) \underset{x=0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) \underset{x=0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\mathrm{ch}(x) \underset{x=0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$, $\mathrm{sh}(x) \underset{x=0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$

▶ **Propriétés (Manipulations des DL) :**
- Combinaisons linéaires de fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$.
- Produit de deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$.
- Composition de deux fonctions admettant un DL_n.
- Quotient de deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$.

Remarques : On a indiqué quelques raffinements ***sur des exemples*** dans les méthodes de calcul, sur les ordres nécessaires en fonction des valuations des parties régulières, mais aucun théorème précis n'a été énoncé.

▶ **Théorème (Intégration d'un développement limité) :**
Soit I un intervalle contenant 0 ; si f est continue et dérivable sur I et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est **la** primitive de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f' qui vaut $f(0)$ en 0.

▶ **Propriété :**
Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et **si on sait que f' admet un** $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$, la partie régulière du $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de f' est la dérivée de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

▶ **Exemples (DL usuels v.2.0) :** $\forall n \in \mathbb{N}$,

- $\ln(1-x) \underset{x=0}{=} -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$.
- $\ln(1+x) \underset{x=0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$.
- $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x=0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$.

▶ **Définition (Développements limités généralisés) :**
Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$; on dit que f admet un *développement limité généralisé à l'ordre n en x_0* si $x \mapsto (x - x_0)^p f(x)$ admet un $\mathrm{DL}_{n+p}(x_0)$.

■ Complément :

▶ **Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange) :**
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$;
on note $M_{n+1} = \sup\Big(\Big\{|f^{(n+1)}(t)|, \quad t \in [a, b]\Big\}\Big)$, on a :
$$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Chapitre 16 Espaces vectoriels

■ Définitions, Généralités, Exemples :

▶ **Définition :**
Si $\mathbb{K}$ est un corps ; on dit que $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (en abrégé $\mathbb{K}$-e.v.) si :
- (E est non vide)
- E est muni d'une loi de composition interne $+$ telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif d'élément neutre 0_E.
- $\bullet$ est une loi de composition externe : $\bullet \ : \ \left|\begin{array}{l}\mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \bullet x\end{array}\right.$.
- Si on a les propriétés suivantes : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\quad (\lambda + \mu) \bullet x = \lambda \bullet x + \mu \bullet x$;
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall(x, y) \in E^2$, $\quad \lambda \bullet (x + y) = \lambda \bullet x + \lambda \bullet y$;
$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\quad \lambda \bullet (\mu \bullet x) = (\lambda\mu) \bullet x$;
$\forall x \in E$, $\quad 1_{\mathbb{K}} \bullet x = x$

▶ **Vocabulaire :** On appelle E l'ensemble des *vecteurs*, $\mathbb{K}$ l'ensemble des *scalaires*.

▶ **Propriété :** $\lambda \cdot x = 0_E \iff x = 0_E$ ou $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$.

▶ **Exemples :**
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ sont des $\mathbb{R}$-ev.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-ev mais aussi un $\mathbb{R}$-ev.
- $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev, $(\mathbb{C}_n[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-ev.
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev.
- $(\{f \text{ admettant un } DL_n(a)\}, +, \cdots)$ est un $\mathbb{R}$-ev.

▶ **Propriétés :**
- Si $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ sont deux $\mathbb{K}$-e.v., on peut munir leur produit cartésien $E_1 \times E_2$ d'une structure de $\mathbb{K}$-e.v.
- Si X est un ensemble quelconque et si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., l'ensemble des fonctions de X dans E, E^X peut également être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-e.v.

■ Combinaisons linéaires, Caractère libre, lié, générateur :

▶ **Définition :** Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs et $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires *presque nulle* (c'est à dire qu'ils sont tous nuls sauf éventuellement un nombre fini) ; on définit la *combinaison linéaire des x_i de coefficients λ_i* par : $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ (la somme ne porte que sur l'ensemble *fini* des indices tels que $\lambda_i \neq 0$).

▶ **Définition (caractère libre) :**
$(x_i)_{i \in I}$ est une famille *libre* si toute pour toute combinaison linéaire :
$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \quad \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$
Dans le cas contraire, on dit que la famille est *liée*.

▶ **Premières propriétés :**
- La famille vide est libre.

- Une famille à un seul élément est libre si et seulement si cet élément est non nul.
- Si 0_E est un élément d'une famille, elle est liée.
- Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Si $\sigma : I \to I$ est une bijection, $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est libre.

▶ **Définition (familles étagées/échelonnées) :**
Soit $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ et $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ deux familles de vecteurs de E. On dit que $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ est *étagée* (ou *échelonnée*) par rapport à $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ ssi il existe des scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant i}}$ tels que : $\forall k \in 1, n,\ y_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_{k,\,j} x_j$, avec de plus, $\forall i \in 1, n, \quad \lambda_{i,\,i} \neq 0$.

▶ **Propriété :**
Si une famille $\mathcal{F}_1$ est échelonnée par rapport à une famille $\mathcal{F}_2$, alors la famille $\mathcal{F}_2$ est échelonnée par rapport à $\mathcal{F}_1$.

▶ **Propriété :**
Si $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ est une famille libre et si $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ est étagée par rapport à $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ alors $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ est libre.

▶ **Définition (famille génératrice) :**
Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est *génératrice* si et seulement si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$.

▶ **Premières propriétés :**
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
- Si $\sigma : I \to I$ est une bijection, $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est génératrice.

▶ **Propriété :**
Une famille échelonnée par rapport à une famille génératrice est génératrice.

▶ **Définition (base) :**
Une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

▶ **Propriété :** Si B est une base de E, tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de B.

▶ **Propriétés :**
- Si $\sigma \;:\; I \to I$ est une bijection, $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si $\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est génératrice.
- Une famille échelonnée par rapport à une base est une base.

▶ **Théorème :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E ; les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
- $(x_i)_{i\in I}$ est une base ;
- $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale au sens de l'inclusion ;
- $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale au sens de l'inclusion.

Remarque : on ne parle pas de cardinal ou de dimension finie ici !

■ Sous-espaces vectoriels :

▶ **Définition (sous-espace vectoriel) :**
Il s'agit d'une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-e.v. E qui est stable par combinaison linéaire.

▶ **Propriété :** Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev est un $\mathbb{K}$-ev.

▶ **Propriété :** Toute intersection (finie ou non) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

▶ **Remarque :** Il n'existe pas de telle propriété pour la réunion de s-e.v. ! Par contre, on a montré en exercice que l'union de deux s-e.v. était encore un s-e.v. si et seulement si l'un était inclus dans l'autre.

▶ **Définition (sous-espace vectoriel engendré) :**
Soit A une partie de E ; l'intersection de tous les s-e.v. de E contenant A est notée $\mathbf{Vect}(A)$.

▶ **Propriété :**
$\mathbf{Vect}(A)$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.

■ Applications linéaires :

▶ **Définition (applications linéaires) :**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \;:\; E \to F$; on dit que f est une application linéaire ssi :

$$\forall (x,\, y) \in E^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall (\lambda,\, x) \in \mathbb{K}\times E, \qquad f(\lambda\cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

On note $\mathscr{L}(E,\, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

▶ **Vocabulaire :**
- Un *isomorphisme* de E dans F est une application linéaire bijective de E sur F ; on note $\mathrm{Isom}\left(E,\, F\right)$ l'ensemble des isomorphismes.
- Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans lui-même ; on note $\mathscr{L}\left(E\right)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Enfin, un *automorphisme* de E est un endomorphisme bijectif de E ; on note $\mathrm{Aut}\left(E\right)$ l'ensemble des automorphismes de E.

▶ **Propriétés :**
- L'image d'une famille liée par une application linéaire est une famille liée.
- L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.
- L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.

▶ **Définition (image et noyau d'une application linéaire) :**
Si $f \in \mathscr{L}\left(E,\, F\right)$, on définit : $\begin{cases} \mathbf{im}(f) = \{f(x), \quad x\in E\} \\ \mathbf{ker}(f) = \{x \in E \;\;/\;\; f(x) = 0_F\} \end{cases}$

▶ **Propriété :** L'image directe d'un s-e.v. de E par $f \in \mathscr{L}\left(E,\, F\right)$ est un s-e.v. de F.
L'image réciproque (ensembliste) d'un s-e.v. de F par f est un s-e.v. de E.
En particulier $\mathbf{ker}(f)$ et $\mathbf{im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.

▶ **Propriété (caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité) :**
$f \in \mathscr{L}(E,\, F)$ est injective ssi $\mathbf{ker}(f) = \left\{0_E\right\}$; elle est surjective ssi $\mathbf{im}(f) = F$.

▶ **Propriété :**
Si $h \in \mathscr{L}\left(F,\, G\right)$, $\psi_h \;:\; \left|\begin{array}{l} \mathscr{L}\left(E,\, F\right) \to \mathscr{L}\left(E,\, G\right) \\ \qquad f \mapsto h\circ f \end{array}\right.$ est linéaire.
Si $g \in \mathscr{L}\left(A,\, E\right)$, $\phi_g \;:\; \left|\begin{array}{l} \mathscr{L}\left(E,\, F\right) \to \mathscr{L}\left(A,\, F\right) \\ \qquad f \mapsto f\circ g \end{array}\right.$ est linéaire.

▶ **Définition ($\mathbb{K}$-algèbre) :** (quelques idées)...

▶ **Propriété :**
Si E est un $\mathbb{K}$-ev, $\mathscr{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

▶ **Définition (groupe linéaire) :**
On appelle groupe linéaire et on note $GL(E)$ (avec E un $\mathbb{K}$-ev) l'ensemble des automorphismes de E muni de la loi de composition : $\left(\mathrm{Aut}(E),\, \circ\right)$.
En particulier, si $f \in \mathrm{Isom}(E,\, F)$, sa bijection réciproque est un élément de $\mathrm{Isom}(F,\, E)$.

■ Sommes directes et applications linéaires :

▶ **Définition :** Si E est un $\mathbb{K}$–e.v. et E_1 et E_2 deux s-e.v. de E, on appelle *somme de* E_1 *et* E_2 et on note $E_1 + E_2$ le s-e.v. de E défini par :

$$E_1 + E_2 = \left\{e_1 + e_2, \quad (e_1,\, e_2) \in E_1 \times E_2\right\}$$

▶ **Propriété :** $E_1 + E_2 = \mathbf{Vect}(E_1 \cup E_2)$.

▶ **Définition (somme directe de deux s-e.v.) :**
La somme $E_1 + E_2$ est *directe* si on a *de plus* $E_1 \cap E_2 = \left\{0_E\right\}$; on note alors $E_1 + E_2 = E_1 \bigoplus E_2$.

▶ **Remarque :** La définition donnée ici n'est pas généralisable pour plus de deux s-e.v....