



Chapitre 14 Polynômes

■ Définitions, Construction :

■ Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$:

► **Définition :** Si $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, on dit que A est un multiple de B ou que B divise A si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BC$, et on note $B \mid A$.

► **Définition :** Deux polynômes $(A, B) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$, sont *associés* ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$ (cela équivaut à $P \mid Q$ et $Q \mid P$).

■ Fonctions polynomiales, racines d'un polynôme :

► **Définition :** À tout polynôme formel $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $\tilde{P}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ définie par $x \mapsto \sum_{k \geq 0} a_k x^k$.

► **Algorithme (Hörner) :** Mise en œuvre de l'*algorithme de Hörner*.

► **Propriétés :** L'application $P \mapsto \tilde{P}$ est « compatible » avec les opérations algébriques, la composition, (la dérivation lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)...

Théorème (Formules de Taylor pour les polynômes) :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k \geq 0} \left(D^k(P) \right) (\alpha) \frac{(X - \alpha)^k}{k!};$$

$$\text{autre formulation : } P(X + \alpha) = \sum_{k \geq 0} \left(D^k(P) \right) (\alpha) \frac{X^k}{k!}.$$

► Corollaire (Formule de Mac-Laurin) :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P = \sum_{k \geq 0} \left(D^k(P) \right) (0) \frac{X^k}{k!}$$

► **Corollaire :** $\forall a \in \mathbb{K}$, tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des $\{(X - a)^j, j \in [0, n]\}$.

► **Définition :** Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, on dit que α est un *zéro* ou une *racine* de P ssi $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

► **Propriété :** α est un zéro de P ssi $(X - \alpha) \mid P$.

► **Corollaire :** $P \in \mathbb{K}[X]$ admet deux zéros distincts α, β ssi $(X - \alpha)(X - \beta) \mid P$.

► **Corollaire :** Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines deux à deux distinctes.

Autre formulation : un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul.

■ Factorisation, Polynômes irréductibles :

► **Définition :** Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* si :

- ◊ $\deg P \geq 1$
- ◊ Les seuls diviseurs de P (à constante multiplicative non nulle près) sont P et 1.

Propriétés :

- ◊ Tout polynôme de degré 1 est irréductible.
- ◊ Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré au moins 1 admet un diviseur irréductible.
- ◊ Il existe une infinité de polynômes unitaires irréductibles.

► **Théorème (Décomposition de facteurs irréductibles) :** (admis)

Si A est un polynôme de degré au moins 1 de $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}^*$, une unique famille de polynômes unitaires irréductibles $P_1, \dots, P_n$ deux à deux distincts, une unique famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in$

$(\mathbb{N}^*)^n$ et un unique $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que : $A = \lambda \prod_{j=1}^n P_j^{\alpha_j}$.

► **Théorème :** Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $B \neq 0$, alors $\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

On dit que Q est le *quotient* et R le *reste* de la division euclidienne de A par B .

► **Algorithme :** Mise en œuvre de l'*algorithme de division euclidienne* pour les polynômes.

► **Corollaire :** On en déduit en particulier que l'application $P \mapsto \tilde{P}$ est injective lorsque $\mathbb{K}$ est infini.

Il existe donc une bijection entre polynômes et fonctions polynomiales pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

► **Définition (Ordre de multiplicité d'une racine) :** $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ si $(X - \alpha)^k$ divise P et $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P .

► **Propriété :** α est une racine de P d'ordre k ssi $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Propriété (Caractérisation avec les dérivées n -ièmes) :

$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ ssi :

$$\diamond \forall j \in [0, k - 1], \quad D^j(P)(\alpha) = 0;$$

$$\diamond D^k(P)(\alpha) \neq 0.$$

► **Corollaire :** Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $m \geq 1$ de P , c'est une racine de multiplicité $m - 1$ de P' .

► **Définition :** On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est *scindé* sur $\mathbb{K}$ ssi :

$$\exists r \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{K}^*, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r, \quad P = a \prod_{j=1}^r (X - \alpha_j)$$

► **Propriété (Relations coefficients/racines) :**

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme scindé dont les racines (écrites

avec multiplicité) sont $x_1, \dots, x_n$ alors :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

► **Exercice :** exemples d'expressions de fonctions algébriques symétriques à partir des fonctions symétriques élémentaires.

On appelle cette écriture la *décomposition de P en produit de facteurs irréductibles*.

► **Théorème (Théorème de d'Alembert-Gauss) :** (admis)

Tout polynôme **non constant** de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

En particulier, les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 ; tous les polynômes des $\mathbb{C}[X]$ sont scindés.

► **Définition :** Polynôme conjugué $\bar{P}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

► **Propriété :** Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine d'ordre m de P alors $\bar{\alpha}$ est également une racine d'ordre m de P .

► **Propriété :** Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- Les polynômes de degré 1.
- Les polynômes de degré 2 et de discriminant strictement négatif.

Chapitre 15 Développement limités

■ Développement limités :

► **Définition (DL à l'ordre n) :**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$; on dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x_0 s'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$f(x) \underset{x=x_0}{=} P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

C'est-à-dire : $\exists(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists \varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t \rightarrow x_0} \varepsilon(t) = 0$ et :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k (x - x_0)^k \right) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

On dit que P_n est la *partie régulière* du DL à l'ordre n .

Propriété (Unicité du développement limité) :

Lorsqu'il existe, le développement limité en 0 à l'ordre n d'une fonction est unique.

► **Définition :** Si f admet un $DL_n(0)$ alors pour tout $k \in [0, n]$, f admet un $DL_k(0)$ et sa partie régulière est la « *troncature du $DL_n(0)$ au rang k* ».

► **Propriété :** Lien avec la régularité de f

On a déjà vu que f est continue en a ssi elle admet un DL d'ordre 0 en a .

f est dérivable en a ssi elle admet un DL d'ordre 1 en a .

On rappelle que cette équivalence n'est pas vraie pour les ordres supérieurs ! (contre-exemple : $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$).

Propriété :

Si f est une fonction continue sur un voisinage de 0, si $n \in \mathbb{N}$, et

si $f(t) \underset{t=0}{=} o(t^n)$, alors, en notant $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, on a :

$$F(x) \underset{x=0}{=} o(x^{n+1}).$$

Théorème (Formule de Taylor-Young) :

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, elle admet un $DL_n(0)$.

On peut préciser la partie régulière du DL_n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n);$$

Exemples (DL usuels v.1.0) : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\bullet e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\bullet \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

$$\bullet \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\bullet \sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\bullet \operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

► **Propriétés (Manipulations des DL) :**

- Combinaisons linéaires de fonctions admettant un $DL_n(a)$.
- Produit de deux fonctions admettant un $DL_n(a)$.
- Composition de deux fonctions admettant un DL_n .
- Quotient de deux fonctions admettant un $DL_n(a)$.

Remarques : On a indiqué quelques raffinements *sur des exemples*

■ Complément :

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange) :

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$;

on note $M_{n+1} = \sup \left(\left\{ |f^{(n+1)}(t)|, t \in [a, b] \right\} \right)$, on a :

$$|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

dans les méthodes de calcul, sur les ordres nécessaires en fonction des valuations des parties régulières, mais aucun théorème précis n'a été énoncé.

► **Théorème (Intégration d'un développement limité) :**

Soit I un intervalle contenant 0 ; si f est continue et dérivable sur I et si f' admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est la primitive de la partie régulière du $DL_n(0)$ de f' qui vaut $f(0)$ en 0.

► **Propriété :**

Si f admet un $DL_n(0)$ et si on sait que f' admet un $DL_{n-1}(0)$, la partie régulière du $DL_{n-1}(0)$ de f' est la dérivée de la partie régulière du $DL_n(0)$ de f .

► **Exemples (DL usuels v.2.0) :** $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\bullet \ln(1-x) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

$$\bullet \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n).$$

$$\bullet \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

► **Définition (Développements limités généralisés) :**

Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$; on dit que f admet un *développement limité généralisé* à l'ordre n en x_0 si $x \mapsto (x-x_0)^p f(x)$ admet un $DL_{n+p}(x_0)$.

Chapitre 16 Espaces vectoriels

■ Définitions, Généralités, Exemples :

► **Définition :**

Si $\mathbb{K}$ est un corps ; on dit que $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (en abrégé $\mathbb{K}$ -e.v.) si :

- (E est non vide)
- E est muni d'une loi de composition interne $+$ telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif d'élément neutre 0_E .
- $\bullet$ est une loi de composition externe : $\bullet : \begin{cases} \mathbb{K} \times E \rightarrow E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \bullet x \end{cases}$
- Si on a les propriétés suivantes : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \bullet x = \lambda \bullet x + \mu \bullet x$;
 $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \bullet (x + y) = \lambda \bullet x + \lambda \bullet y$;
 $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda \bullet (\mu \bullet x) = (\lambda\mu) \bullet x$;
 $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \bullet x = x$

► **Vocabulaire :** On appelle E l'ensemble des *vecteurs*, $\mathbb{K}$ l'ensemble des

scalaires.

► **Propriété :** $\lambda \bullet x = 0_E \iff x = 0_E$ ou $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$.

► **Exemples :**

- $(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{R}^2, +, \cdot), (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ sont des $\mathbb{R}$ -ev.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -ev mais aussi un $\mathbb{R}$ -ev.
- $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -ev, $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -ev.
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -ev.
- $(\{f \text{ admettant un } DL_n(a)\}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -ev.

► **Propriétés :**

- Si $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ sont deux $\mathbb{K}$ -e.v., on peut munir leur produit cartésien $E_1 \times E_2$ d'une structure de $\mathbb{K}$ -e.v.
- Si X est un ensemble quelconque et si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v., l'ensemble des fonctions de X dans E , E^X peut également être muni d'une structure de $\mathbb{K}$ -e.v.

■ Combinaisons linéaires, Caractère libre, lié, générateur :

► **Définition :** Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs et $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires *presque nulle* (c'est à dire qu'ils sont tous nuls sauf éventuellement un nombre fini) ; on définit la *combinaison linéaire* des x_i de coefficients λ_i par : $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ (la somme ne porte que sur

l'ensemble *fini* des indices tels que $\lambda_i \neq 0$).

► **Définition (caractère libre) :**

$(x_i)_{i \in I}$ est une famille *libre* si toute pour toute combinaison linéaire :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est *liée*.

► **Premières propriétés :**

- La famille vide est libre.
- Une famille à un seul élément est libre si et seulement si cet élément est non nul.
- Si 0_E est un élément d'une famille, elle est liée.
- Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Si $\sigma : I \rightarrow I$ est une bijection, $(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est libre.

► **Définition (familles étagées/échelonnées) :**

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux familles de vecteurs de E . On dit que $(y_1, \dots, y_n)$ est *étagée* (ou *échelonnée*) par rapport à $(x_1, \dots, x_n)$ ssi il existe des scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i}$ tels que : $\forall k \in$

$$1, n, y_k = \sum_{j=1}^k \lambda_{k,j} x_j, \text{ avec de plus, } \forall i \in 1, n, \lambda_{i,i} \neq 0.$$

► **Propriété :**

Si une famille $\mathcal{F}_1$ est échelonnée par rapport à une famille $\mathcal{F}_2$, alors la famille $\mathcal{F}_2$ est échelonnée par rapport à $\mathcal{F}_1$.

► **Propriété :**

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre et si $(y_1, \dots, y_n)$ est étagée par rapport à $(x_1, \dots, x_n)$ alors $(y_1, \dots, y_n)$ est libre.

► **Définition (famille génératrice) :**

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est *génératrice* si et seulement si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$.

► **Premières propriétés :**

- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
- Si $\sigma : I \rightarrow I$ est une bijection, $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est génératrice.

► **Propriété :**

Une famille échelonnée par rapport à une famille génératrice est génératrice.

► **Définition (base) :**

Une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une *base* de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

► **Propriété :** Si B est une base de E , tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de B .

► **Propriétés :**

- Si $\sigma : I \rightarrow I$ est une bijection, $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est génératrice.
- Une famille échelonnée par rapport à une base est une base.