Semaine 21

lundi 17 mars 2025
> samedi 22 mars 2025

Chapitre 13 Systèmes linéaires, calcul matriciel

Matrices inversibles :

- **Définition :** Matrices inversibles, inverse.
  Propriétés des matrices inversibles (structure de groupe - sans définir l'axiomatique d'un groupe).
- **Propriété :** Inverse d'un produit de matrices inversibles.
- **Propriété :** Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles et leurs inverses sont encore des matrices d'opérations élémentaires.
- **Propriété :** Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - A est inversible
  - Pour tout B, le système $AX = B$ admet une unique solution ;

Remarque : le théorème complet démontré en cours est : Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est inversible
- Pour tout B, le système $AX = B$ admet une unique solution ;
- A peut se ramener à la matrice I_n en effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes ;
- Pour tout B, le système $AX = B$ admet au moins une solution ;
- L'unique solution du système $AX = 0$ est la solution nulle.

- **Propriété :** Caractérisation des matrices inversibles parmi les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

Chapitre 14 Polynômes

Définitions, Construction :

- **Définition :** Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne un corps ; en pratique, il s'agit de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *support* de la suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0\}$.
  Un polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ à *support fini* (on parle également de suite *presque nulle*) ; on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes.
- **Exemples et vocabulaire :**
  - ◊ La suite nulle est appelée polynôme nul et noté 0
  - ◊ L'ensemble des polynômes constants est : $\left\{(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \, \forall n \geqslant 1, \; a_n = 0\right\}$.
  - ◊ On dit qu'un polynôme est un monôme si un seul des coefficients est non nul.
- **Remarque :** $\mathbb{K}[X] \neq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- **Définitions :** Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$
  - ◊ On appelle *degré de* P et on note $\deg(P)$ l'entier $\max\Big\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\Big\}$.
  - ◊ $a_{\deg(P)}$ est le *coefficient dominant* de P.
  - ◊ On dit que P est *unitaire* si son coefficient dominant vaut 1.
  - ◊ Par convention $\deg(0) = -\infty$.
- **Proposition -- Définition :** On définit l'addition de $P = (a_n) \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = (b_n) \in \mathbb{K}[X]$ par $P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$.
  On a $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$:
  - $\deg(P + Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, il y a égalité.
- **Proposition - Définition :** On définit la multiplication de 2 polynômes $P = (a_n) \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = (b_n) \in \mathbb{K}[X]$ par $P \times Q = PQ = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ où :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$
  On a $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- **Proposition :** Les éléments inversibles (pour la loi $\times$) de cet anneau sont les polynômes constants non nuls.
- **Proposition - Définition :** On définit un produit externe sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$: pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = (a_n) \in \mathbb{K}[X]$, on note $\lambda \cdot P = \lambda P = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$.
- **Proposition - Définition :** On dit que $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ admet une structure d'*espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ (ou de $\mathbb{K}$–espace vectoriel, ou en abrégé $\mathbb{K}$-e.v.) ; cela signifie :
  - $(\mathbb{K}[X], +)$ groupe abélien.
  - $\cdot$ est une loi externe de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ telle que :
  $$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 : \begin{cases} (\alpha+\beta)\cdot P = \alpha \cdot P + \beta \cdot P \\ \alpha \cdot (P + Q) = \alpha \cdot P + \alpha \cdot Q \\ \alpha \cdot (\beta \cdot P) = (\alpha\beta) \cdot P \\ 1_{\mathbb{K}} \cdot P = P \end{cases}.$$
- **Proposition - Définition :** Pour résumer le fait que $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau et $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. ainsi que la relation de compatibilité :
  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \, \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (\lambda \cdot P) \times Q = \lambda \cdot (P \times Q) = P \times (\lambda \cdot Q)$
  on dit que $\mathbb{K}[X]$ est une *algèbre sur* $\mathbb{K}$ (ou encore $\mathbb{K}$-algèbre).
- **Notation :** X désigne le polynôme $(0, 1, 0, \ldots) \in \mathbb{K}[X]$, on convient de noter $X^0 = 1$, $X^1 = X$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad X^k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ termes}}, 1, 0, \ldots)$.
  Par construction, tout polynôme s'écrit comme combinaison linéaire finie à coefficients dans $\mathbb{K}$ de polynômes de $\{X^j, \, j \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- **Définition :** Si $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$; on définit le *polynôme composé*, noté $P \circ Q$ ou $P(Q)$, par $P \circ Q = \sum_{n=0}^{N} a_n Q^n$.
- **Proposition :** $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q polynôme non constant, on a : $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.
- **Propriétés :** $\forall (P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$:
  - ◊ $(P + \alpha Q) \circ R = P \circ R + \alpha Q \circ R$;
  - ◊ $(PQ) \circ R = (P \circ R)(Q \circ R)$;
  - ◊ $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$;
  - ◊ $X \circ P = P \circ X = P$.
- **Définition :** Pour tout $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on note P' ou $D(P)$ le *polynôme dérivé de* P par $P' = \sum_{n=1}^{N} n a_n X^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)a_{n+1}X^n$.
  On a en particulier $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geqslant 1$, $\quad \deg(P') = \deg(P) - 1$ et $\deg(P') = -\infty$ si $\deg(P) \leqslant 0$.
  On définit par récurrence la dérivée n-ième d'un polynôme.
- **Cas particulier important :**
  $$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad D^k(X^n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$
- **Propriétés :** $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $(P + \alpha Q)' = P' + \alpha Q'$, $(PQ)' = P'Q + PQ'$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$:

- **Définition :** Si $(A, B) \in \mathbb{K}[x]^2$, on dit que A est un multiple de B ou que B divise A si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BC$, et on note $B \mid A$.
- **Définition :** Deux polynômes $(A, B) \in (\mathbb{K}[x] \setminus \{0\})^2$, sont *associés* ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$ (cela équivaut à $P \mid Q$ et $Q \mid P$).
- **Théorème :** Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $B \neq 0$, alors $\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
  On dit que Q est le *quotient* et R le *reste* de la division euclidienne de A par B.
- **Algorithme :** Mise en œuvre de l'*algorithme de division euclidienne* pour les polynômes.

Fonctions polynomiales, racines d'un polynôme :

- **Définition :** À tout polynôme formel $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $\widetilde{P}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ définie par $x \mapsto \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$.
- **Algorithme (Hörner) :** Mise en œuvre de l'*algorithme de Hörner*.
- **Propriétés :** L'application $P \mapsto \widetilde{P}$ est « compatible » avec les opérations algébriques, la composition, (la dérivation lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)...
- **Théorème (Formules de Taylor pour les polynômes) :**
  $$\forall P \in \mathbb{K}[X], \, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k\geqslant 0} \Big(D^k(P)\Big)(\alpha)\frac{(X-\alpha)^k}{k!} \, ;$$
  autre formulation : $P(X + \alpha) = \sum_{k\geqslant 0} \Big(D^k(P)\Big)(\alpha)\dfrac{X^k}{k!}$.
- **Corollaire (Formule de Mac-Laurin) :**
  $$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P = \sum_{k\geqslant 0} \Big(D^k(P)\Big)(0)\frac{X^k}{k!}$$
- **Corollaire :** $\forall a \in \mathbb{K}$, tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des $\Big\{(X - a)^j, \; j \in 0, \, n\Big\}$.
- **Définition :** Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, on dit que α est un *zéro* ou une *racine* de P ssi $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.
- **Propriété :** α est un zéro de P ssi $(X - \alpha) \mid P$.
- **Corollaire :** $P \in \mathbb{K}[X]$ admet deux zéros distincts α, β ssi $\big(X - \alpha\big)\big(X - \beta\big) \mid P$.

Corollaire : Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines deux à deux distinctes.
Autre formulation : un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.

- **Corollaire :** On en déduit en particulier que l'application $P \mapsto \widetilde{P}$ est injective lorsque $\mathbb{K}$ est infini.
  Il existe donc une bijection entre polynômes et fonctions polynomiales pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- **Définition (Ordre de multiplicité d'une racine) :** $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ si $(X-\alpha)^k$ divise P et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.
- **Propriété :** α est une racine de P d'ordre k ssi $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^k Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
- **Propriété (Caractérisation avec les dérivées n-ièmes) :**
  $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ ssi :
  ◊ $\forall j \in 0,\, k-1, \quad D^j(P)(\alpha) = 0$;
  ◊ $D^k(P)(\alpha) \neq 0$.

Factorisation, Polynômes irréductibles :

- **Définition :** Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* si :
  ◊ $\deg P \geqslant 1$
  ◊ Les seuls diviseurs de P (à constante multiplicative non nulle près) sont P et 1.
- **Propriétés :**
  ◊ Tout polynôme de degré 1 est irréductible.
  ◊ Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré au moins 1 admet un diviseur irréductible.
  ◊ Il existe une infinité de polynômes unitaires irréductibles.
- **Théorème (Décomposition de facteurs irréductibles) :** (admis)
  Si A est un polynôme de degré au moins 1 de $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}^*$, une unique famille de polynômes unitaires irréductibles $P_1, \ldots, P_n$ deux à deux distincts, une unique famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et un unique $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que : $A = \lambda \prod_{j=1}^{n} P_j^{\alpha_j}$.
  On appelle cette écriture la *décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.*
- **Théorème (Théorème de d'Alembert-Gauss) : (admis)**
  Tout polynôme **non constant** de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.
  En particulier, les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 ; tous les polynômes des $\mathbb{C}[X]$ sont scindés.
- **Définition :** Polynôme conjugué $\overline{P}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.
- **Propriété :** Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine d'ordre m de P alors $\overline{\alpha}$ est également une racine d'ordre m de P.
- **Propriété :** Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
  - Les polynômes de degré 1.
  - Les polynômes de degré 2 et de discriminant strictement négatif.

- **Corollaire :** Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $m \geqslant 1$ de P, c'est une racine de multiplicité $m-1$ de P'.
- **Définition :** On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ ssi :
$$\exists r \in \mathbb{N},\ \exists a \in \mathbb{K}^*,\ \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r, \quad P = a \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)$$
- **Propriété (Relations coefficients/racines) :**
  Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme scindé dont les racines (écrites avec multiplicité) sont $x_1, \ldots, x_n$ alors :
$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$
- **Exercice :** exemples d'expressions de fonctions algébriques symétriques à partir des fonctions symétriques élémentaires.

Chapitre 15 Développements limités

Développements limités :

- **Définition (DL à l'ordre n) :**
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$; on dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x_0 s'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$f(x) \underset{x=x_0}{=} P_n(x-x_0) + o\Big((x-x_0)^n\Big)$$
  C'est-à-dire : $\exists (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists \varepsilon \ : \ V \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{t \to x_0} \varepsilon(t) = 0$ et :
$$\forall x \in V, \quad f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-x_0)^k\right) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$
  On dit que P_n est la *partie régulière* du DL à l'ordre n.
- **Propriété (Unicité du développement limité) :**
  Lorsqu'il existe, le développement limité en 0 à l'ordre n d'une fonction est unique.
- **Définition :** Si f admet un $DL_n(0)$ alors pour tout $k \in 0,\, n$, f admet un $\mathrm{DL}_k(0)$ et sa partie régulière est la « *troncature du $DL_n(0)$ au rang k* ».
- **Propriété :** *Lien avec la régularité de f*
  On a déjà vu que f est continue en a ssi elle admet un DL d'ordre 0 en a.
  f est dérivable en a ssi elle admet un DL d'ordre 1 en a.
  On rappelle que cette équivalence n'est pas vraie pour les ordres supérieurs ! (contre-exemple : $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$).
- **Propriété :**
  Si f est une fonction continue sur un voisinage de 0, si $n \in \mathbb{N}$, et si $f(t) \underset{t=0}{=} o(t^n)$, alors, en notant $F \ : \ x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$, on a : $F(x) \underset{x=0}{=} o(x^{n+1})$.
- **Théorème (Formule de Taylor-Young) :**
  Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, elle admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.
  On peut préciser la partie régulière du DL_n :
$$f(x) \underset{x=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o\left(x^n\right);$$

- **Exemples (DL usuels v.1.0) :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,
  - $\mathrm{e}^x \underset{x=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha \underset{x=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.
  - $\cos(x) \underset{x=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
  - $\sin(x) \underset{x=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
  - $\mathrm{ch}(x) \underset{x=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$, $\mathrm{sh}(x) \underset{x=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
- **Propriétés (Manipulations des DL) :**
  - Combinaisons linéaires de fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$.
  - Produit de deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$.
  - Composition de deux fonctions admettant un DL_n.
  - Quotient de deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$.

  Remarques : On a indiqué quelques raffinements ***sur des exemples*** dans les méthodes de calcul, sur les ordres nécessaires en fonction des valuations des parties régulières, mais aucun théorème précis n'a été énoncé.
- **Théorème (Intégration d'un développement limité) :**
  Soit I un intervalle contenant 0 ; si f est continue et dérivable sur I et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est **la** primitive de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f' qui vaut $f(0)$ en 0.
- **Propriété :**
  Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et **si on sait que f' admet un** $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$, la partie régulière du $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de f' est la dérivée de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.
- **Exemples (DL usuels v.2.0) :** $\forall n \in \mathbb{N}$,
  - $\ln(1-x) \underset{x=0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$.
  - $\ln(1+x) \underset{x=0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$.
  - $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$.
- **Définition (Développements limités généralisés) :**
  Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$; on dit que f admet un *développement limité généralisé à l'ordre n en x_0* si $x \mapsto (x-x_0)^p f(x)$ admet un $\mathrm{DL}_{n+p}(x_0)$.