Semaine 20

lundi 10 mars 2025
> samedi 15 mars 2025

Chapitre 13 Systèmes linéaires, calcul matriciel

■ Matrices inversibles :

- **Définition :** Matrices inversibles, inverse.
  Propriétés des matrices inversibles (structure de groupe - sans définir l'axiomatique d'un groupe).
- **Propriété :** Inverse d'un produit de matrices inversibles.
- **Propriété :** Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles et leurs inverses sont encore des matrices d'opérations élémentaires.
- **Propriété :** Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - A est inversible
  - Pour tout B, le système $AX = B$ admet une unique solution ;

Remarque : le théorème complet démontré en cours est : Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- A est inversible
- Pour tout B, le système $AX = B$ admet une unique solution ;
- A peut se ramener à la matrice I_n en effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes ;
- Pour tout B, le système $AX = B$ admet au moins une solution ;
- L'unique solution du système $AX = 0$ est la solution nulle.

- **Propriété :** Caractérisation des matrices inversibles parmi les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

Chapitre 14 Polynômes

■ Définitions, Construction :

- **Définition :** Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne un corps ; en pratique, il s'agit de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *support* de la suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0\}$.
  Un polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ à *support fini* (on parle également de suite *presque nulle*) ; on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes.
- **Exemples et vocabulaire :**
  - ◊ La suite nulle est appelée polynôme nul et noté 0
  - ◊ L'ensemble des polynômes constants est : $\left\{(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \geqslant 1,\ a_n = 0\right\}$.
  - ◊ On dit qu'un polynôme est un monôme si un seul des coefficients est non nul.
- **Remarque :** $\mathbb{K}[X] \neq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- **Définitions :** Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$
  - ◊ On appelle *degré de* P et on note $\deg(P)$ l'entier $\max\left\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\right\}$.
  - ◊ $a_{\deg(P)}$ est le *coefficient dominant* de P.
  - ◊ On dit que P est *unitaire* si son coefficient dominant vaut 1.
  - ◊ Par convention $\deg(0) = -\infty$.
- **Proposition -- Définition :** On définit l'addition de $P = (a_n) \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = (b_n) \in \mathbb{K}[X]$ par $P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$.
  On a $\forall (P,\, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$:
  - $\deg(P + Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, il y a égalité.
- **Proposition - Définition :** On définit la multiplication de 2 polynômes $P = (a_n) \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = (b_n) \in \mathbb{K}[X]$ par $P \times Q = PQ = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ où :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$
  On a $\forall (P,\, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- **Proposition :** Les éléments inversibles (pour la loi $\times$) de cet anneau sont les polynômes constants non nuls.
- **Proposition - Définition :** On définit un produit externe sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$: pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = (a_n) \in \mathbb{K}[X]$, on note $\lambda \cdot P = \lambda P = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$.
- **Proposition - Définition :** On dit que $\big(\mathbb{K}[X], +, \cdot\big)$ admet une structure d'*espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ (ou de $\mathbb{K}$–espace vectoriel, ou en abrégé $\mathbb{K}$-e.v.) ; cela signifie :
  - $(\mathbb{K}[X], +)$ groupe abélien.
  - $\cdot$ est une loi externe de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ telle que :
  $$\forall (\alpha,\, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (P,\, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 : \begin{cases} (\alpha+\beta)\cdot P = \alpha \cdot P + \beta \cdot P \\ \alpha \cdot (P+Q) = \alpha \cdot P + \alpha \cdot Q \\ \alpha \cdot (\beta \cdot P) = (\alpha\beta) \cdot P \\ 1_{\mathbb{K}} \cdot P = P \end{cases}.$$

- **Proposition - Définition :** Pour résumer le fait que $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$ est un anneau et $\big(\mathbb{K}[X], +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. ainsi que la relation de compatibilité :
  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (\lambda \cdot P) \times Q = \lambda \cdot (P \times Q) = P \times (\lambda \cdot Q)$
  on dit que $\mathbb{K}[X]$ est une *algèbre sur* $\mathbb{K}$ (ou encore $\mathbb{K}$-algèbre).
- **Notation :** X désigne le polynôme $(0, 1, 0, \ldots) \in \mathbb{K}[X]$, on convient de noter $X^0 = 1$, $X^1 = X$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad X^k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ termes}}, 1, 0, \ldots)$.
  Par construction, tout polynôme s'écrit comme combinaison linéaire finie à coefficients dans $\mathbb{K}$ de polynômes de $\{X^j,\, j \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- **Définition :** Si $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$; on définit le *polynôme composé*, noté $P \circ Q$ ou $P(Q)$, par $P \circ Q = \sum_{n=0}^{N} a_n Q^n$.
- **Proposition :** $\forall (P,\, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q polynôme non constant, on a : $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.
- **Propriétés :** $\forall (P,\, Q,\, R) \in \mathbb{K}[X]^3$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$:
  - ◊ $(P + \alpha Q) \circ R = P \circ R + \alpha Q \circ R$;
  - ◊ $(PQ) \circ R = (P \circ R)\,(Q \circ R)$;
  - ◊ $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$;
  - ◊ $X \circ P = P \circ X = P$.
- **Définition :** Pour tout $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on note P' ou $D(P)$ le *polynôme dérivé de* P par $P' = \sum_{n=1}^{N} n a_n X^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) a_{n+1} X^n$.
  On a en particulier $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geqslant 1, \quad \deg(P') = \deg(P) - 1$ et $\deg(P') = -\infty$ si $\deg(P) \leqslant 0$.
  On définit par récurrence la dérivée n-ième d'un polynôme.
- **Cas particulier important :**
  $$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad D^k(X^n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$
- **Propriétés :** $\forall (P,\, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $(P + \alpha Q)' = P' + \alpha Q'$, $(PQ)' = P'Q + PQ'$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

■ Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$:

- **Définition :** Si $(A,\, B) \in \mathbb{K}[x]^2$, on dit que A est un multiple de B ou que B divise A si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BC$, et on note $B \mid A$.
- **Définition :** Deux polynômes $(A,\, B) \in \big(\mathbb{K}[x] \setminus \{0\}\big)^2$, sont *associés* ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$ (cela équivaut à $P \mid Q$ et $Q \mid P$).
- **Théorème :** Soit $(A,\, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $B \neq 0$, alors $\exists! (Q,\, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
  On dit que Q est le *quotient* et R le *reste* de la division euclidienne de A par B.
- **Algorithme :** Mise en œuvre de l'*algorithme de division euclidienne* pour les polynômes.

Fonctions polynomiales, racines d'un polynôme :

- **Définition :** À tout polynôme formel $P=\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $\widetilde{P}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ définie par $x \mapsto \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$.
- **Algorithme (Hörner) :** Mise en œuvre de l'*algorithme de Hörner*.
- **Propriétés :** L'application $P\mapsto \widetilde{P}$ est « compatible » avec les opérations algébriques, la composition, (la dérivation lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)...
- **Théorème (Formules de Taylor pour les polynômes) :**
  $$\forall P\in\mathbb{K}[X],\ \forall\alpha\in\mathbb{K},\quad P=\sum_{k\geqslant 0}\Big(D^k(P)\Big)(\alpha)\frac{(X-\alpha)^k}{k!}\,;$$
  autre formulation : $P(X+\alpha)=\sum_{k\geqslant 0}\Big(D^k(P)\Big)(\alpha)\frac{X^k}{k!}$.
- **Corollaire (Formule de Mac-Laurin) :**
  $$\forall P\in\mathbb{K}[X],\quad P=\sum_{k\geqslant 0}\Big(D^k(P)\Big)(0)\frac{X^k}{k!}$$
- **Corollaire :** $\forall a\in\mathbb{K}$, tout polynôme $P\in\mathbb{K}_n[X]$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des $\Big\{(X-a)^j,\ j\in 0,\,n\Big\}$.
- **Définition :** Si $P\in\mathbb{K}[X]$ et si $\alpha\in\mathbb{K}$, on dit que α est un *zéro* ou une *racine* de P ssi $\widetilde{P}(\alpha)=0$.
- **Propriété :** α est un zéro de P ssi $(X-\alpha)\mid P$.
- **Corollaire :** $P\in\mathbb{K}[X]$ admet deux zéros distincts $\alpha,\ \beta$ ssi $(X-\alpha)(X-\beta)\mid P$.
- **Corollaire :** Un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ admet au plus n racines deux à deux distinctes.
  Autre formulation : un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.
- **Corollaire :** On en déduit en particulier que l'application $P\mapsto\widetilde{P}$ est injective lorsque $\mathbb{K}$ est infini.
  Il existe donc une bijection entre polynômes et fonctions polynomiales pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.
- **Définition (Ordre de multiplicité d'une racine) :** $\alpha\in\mathbb{K}$ est une racine de $P\in\mathbb{K}[X]$ de multiplicité $k\in\mathbb{N}^*$ si $(X-\alpha)^k$ divise P et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.
- **Propriété :** α est une racine de P d'ordre k ssi $\exists Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P=(X-\alpha)^kQ$ et $Q(\alpha)\neq 0$.
- **Propriété (Caractérisation avec les dérivées n-ièmes) :**
  $\alpha\in\mathbb{K}$ est une racine de $P\in\mathbb{K}[X]$ d'ordre $k\in\mathbb{N}^*$ ssi :
  ◊ $\forall j\in 0,\,k-1,\quad D^j(P)(\alpha)=0$;
  ◊ $D^k(P)(\alpha)\neq 0$.
- **Corollaire :** Si $\alpha\in\mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $m\geqslant 1$ de P, c'est une racine de multiplicité $m-1$ de P'.
- **Définition :** On dit qu'un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ ssi :
  $$\exists r\in\mathbb{N},\ \exists a\in\mathbb{K}^*,\ \exists(\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_r)\in\mathbb{K}^r,\quad P=a\prod_{j=1}^{r}(X-\alpha_j)$$
- **Propriété (Relations coefficients/racines) :**
  Si $P=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k\in\mathbb{K}[X]$ est un polynôme scindé dont les racines (écrites avec multiplicité) sont $x_1,\,\dots,\,x_n$ alors :
  $$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\dots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$
- **Exercice :** exemples d'expressions de fonctions algébriques symétriques à partir des fonctions symétriques élémentaires.

Factorisation, Polynômes irréductibles :

- **Définition :** Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* si :
  ◊ $\deg P\geqslant 1$
  ◊ Les seuls diviseurs de P (à constante multiplicative non nulle près) sont P et 1.
- **Propriétés :**
  ◊ Tout polynôme de degré 1 est irréductible.
  ◊ Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré au moins 1 admet un diviseur irréductible.
  ◊ Il existe une infinité de polynômes unitaires irréductibles.
- **Théorème (Décomposition de facteurs irréductibles) :** (admis)
  Si A est un polynôme de degré au moins 1 de $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique entier $n\in\mathbb{N}^*$, une unique famille de polynômes unitaires irréductibles $P_1,\,\dots,\,P_n$ deux à deux distincts, une unique famille $(\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_n)\in(\mathbb{N}^*)^n$ et un unique $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ tels que : $A=\lambda\prod_{j=1}^{n}P_j^{\alpha_j}$.
  On appelle cette écriture la *décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.*
- **Théorème (Théorème de d'Alembert-Gauss) : (admis)**
  Tout polynôme **non constant** de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.
  En particulier, les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 ; tous les polynômes des $\mathbb{C}[X]$ sont scindés.
- **Définition :** Polynôme conjugué $\overline{P}$ d'un polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$.
- **Propriété :** Si $P\in\mathbb{R}[X]$ et si $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ est une racine d'ordre m de P alors $\overline{\alpha}$ est également une racine d'ordre m de P.
- **Propriété :** Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
  - Les polynômes de degré 1.
  - Les polynômes de degré 2 et de discriminant strictement négatif.

Chapitre 15 Développements limités

Développements limités :

- **Définition (DL à l'ordre n) :**
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I\setminus\{x_0\}$; on dit que f admet un développement limité à l'ordre $n\in\mathbb{N}$ en x_0 s'il existe $P_n\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que
  $$f(x)\underset{x=x_0}{=}P_n(x-x_0)+o\Big((x-x_0)^n\Big)$$
  C'est-à-dire : $\exists(\alpha_0,\,\dots,\,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\exists V\in\mathcal{V}(x_0)$, $\exists\varepsilon\ :\ V\to\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{t\to x_0}\varepsilon(t)=0$ et :
  $$\forall x\in V,\quad f(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(x-x_0)^k\right)+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$
  On dit que P_n est la *partie régulière* du DL à l'ordre n.
- **Propriété (Unicité du développement limité) :**
  Lorsqu'il existe, le développement limité en 0 à l'ordre n d'une fonction est unique.
- **Définition :** Si f admet un $DL_n(0)$ alors pour tout $k\in 0,\,n$, f admet un $\mathrm{DL}_k(0)$ et sa partie régulière est la « *troncature du $DL_n(0)$ au rang k* ».
- **Propriété :** *Lien avec la régularité de f*
  On a déjà vu que f est continue en a ssi elle admet un DL d'ordre 0 en a.
  f est dérivable en a ssi elle admet un DL d'ordre 1 en a.
  On rappelle que cette équivalence n'est pas vraie pour les ordres supérieurs ! (contre-exemple : $x\mapsto x^3\sin\dfrac{1}{x}$).
- **Propriété :**
  Si f est une fonction continue sur un voisinage de 0, si $n\in\mathbb{N}$, et si $f(t)\underset{t=0}{=}o(t^n)$, alors, en notant $F\ :\ x\mapsto\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, on a : $F(x)\underset{x=0}{=}o(x^{n+1})$.
- **Théorème (Formule de Taylor-Young) :**
  Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, elle admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.
  On peut préciser la partie régulière du DL_n :
  $$f(x)\underset{x=0}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+o(x^n)\,;$$
- **Exemples (DL usuels v.1.0) :** $\forall n\in\mathbb{N}$,
  - $\mathrm{e}^x\underset{x=0}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$.
  - $\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad(1+x)^\alpha\underset{x=0}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)$.