



Chapitre 10 Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle

■ Généralités - Dérivabilité :

► Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), soit $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ définie sur $I \setminus \{a\}$ est prolongeable par continuité en a .

Lorsque c'est le cas, $\ell = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le *nombre dérivé* de f en

a , noté $f'(a)$.

► Interprétation graphique :

le nombre dérivé de f en a (lorsqu'il existe) est la limite de la pente des cordes entre $A = (a, f(a))$ et $M = (x, f(x))$ lorsque M tend vers A .

► Définition :

On parle également de dérivées à gauche et à droite si on peut prolonger la fonction précédente par continuité à gauche ou à droite (et on note les limites correspondantes : $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ respectivement).

► Propriété :

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

► Vocabulaire :

lorsque les limites précédentes existent mais sont distinctes, on dit que f admet deux demi-tangentes en a .

► Utilisation des développements limités à l'ordre 0 et 1 :

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un *développement limité à l'ordre 0* en $a \in I$ et on note en abrégé que f admet un $DL_0(a)$ si et seulement s'il existe $\ell_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I, f(x) = \ell_0 + \varepsilon_0(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_0(x) = 0$$

► Définition :

De même, f admet un $DL_1(a)$ si et seulement s'il existe $(\ell_0, \ell_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I, f(x) = \ell_0 + \ell_1(x - a) + (x - a)\varepsilon_1(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$$

► Théorème :

On dispose des équivalences suivantes :

■ Théorèmes globaux pour les fonctions dérivables sur un intervalle :

► Caractérisation des extrémums locaux d'une fonction dérivable :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$ (qui n'est *pas* une extrémité de I) et admettant un extrémum local en x_0 ; alors $f'(x_0) = 0$. Application à la caractérisation des extrémums d'une fonction.

► Théorème de Rolle :

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

Interprétation graphique, cinématique, contre-exemples lorsqu'une hypothèse est absente.

► Théorème des accroissements finis (TAF) :

Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[)$ (avec $a < b$), alors :

$\exists c \in]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. Interprétation graphique, cinématique.

► Application :

Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}(I)$ une fonction à valeurs réelles alors :

- ◊ f est croissante sur I ssi $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$;
- ◊ f est décroissante sur I ssi $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$;
- ◊ f est constante sur I ssi $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

► Corollaire :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I , f est strictement monotone sur I si et seulement si :

- ◊ la dérivée de f est de signe constant sur I ;
- ◊ il n'existe pas d'intervalle non réduit à un point sur lequel f' s'annule.

■ (Non) Extension des résultats de continuité/dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes :

► Propriété :

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si $\text{Re} f$ et $\text{Im} f$ sont dérivables en x_0 et alors $f'(x_0) = (\text{Re} f)'(x_0) + i(\text{Im} f)'(x_0)$.

Les propriétés opératoires de la dérivation (combinaison linéaire, produit, quotient) sont conservées

► Propriété :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{C}$ sont dérivables sur I et J respectivement, et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur I (et on dispose de la formule habituelle pour la composée).

Chapitre 11 Fonctions convexes

■ Définitions, propriétés

► Définition :

Une fonction est convexe sur un intervalle $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

► Propriété (inégalité de Jensen) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si : $\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels

$$\text{que } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j).$$

►

• « f admet un $DL_0(a)$ » ssi « f est continue en a » (et dans ce cas $\ell_0 = f(a)$).

• « f admet un $DL_1(a)$ » ssi « f est dérivable en a » (et dans ce cas $\ell_0 = f(a), \ell_1 = f'(a)$).

Conséquence : Si f est dérivable en a , elle est continue en a .

► Notations :

on a déjà introduit les notations $\mathcal{C}^n(I), \mathcal{D}^n(I), \dots$

► Propriétés opératoires :

Si f et g sont deux applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$

$$\bullet \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}(I) \text{ et } (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g';$$

$$\bullet f g \in \mathcal{D}(I) \text{ et } (f g)' = f' g + f g';$$

$$\bullet \frac{1}{g} \text{ est dérivable sur } \{x \in I, g(x) \neq 0\} \text{ et } \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

$$\bullet \frac{f}{g} \text{ est dérivable sur } \{x \in I, g(x) \neq 0\} \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

► Théorème de dérivation d'une composée :

Soit $f : I \rightarrow J$ une application dérivable en $a \in I$ et $g : J \rightarrow K$ une application dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

► Théorème de dérivation de la fonction réciproque :

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective, continue sur I (donc strictement monotone sur I), dérivable en $a \in I$.

Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

► Définition :

Un *difféomorphisme* de I sur J est une application dérivable sur I , bijective de I sur J , dont la bijection réciproque est dérivable sur J .

► Égalité des accroissements finis : (« TAF 2ème version »)

Soit $(a, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur $[a, a+h]$ et dérivable sur $]a, a+h[$; alors :

$$\exists \theta \in]0, 1[, f(a+h) - f(a) = hf'(a + \theta h)$$

► Inégalité des accroissements finis (IAF) : (« 1ère version »)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; si $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

► Inégalité des accroissements finis (IAF) : (« 2ème version »)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; si $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq k$, alors f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$.

Application à la caractérisation des fonctions lipschitziennes, interprétation cinématique.

► Théorème de limite de la dérivée :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

◊ Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.

◊ Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \pm\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ et f n'est pas dérivable en a (la courbe admet une demi-tangente verticale).

Contre-exemple pour la réciproque : $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

► Propriété : (« Inégalité des accroissements finis »)

Si $f \in C^0([a, b], \mathbb{C}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{C})$ et si

$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.

► Corollaire :

On conserve en particulier la caractérisation des fonctions dérivables constantes sur un intervalle pour les fonctions à valeurs complexes.

► Ce qui n'est plus vrai :

Le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis, tous les énoncés où la notion de monotonie intervient...

► Propriété (inégalité des pentes) :

Il y a équivalence entre les trois assertions suivantes :

i) f est convexe sur I ;

$$ii) \forall (x, y, z) \in I^3, x < y < z, \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x};$$

$$iii) \forall (x, y, z) \in I^3, x < y < z, \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

► Propriété :

Une fonction est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, la

fonction « pente issue de x » : $t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.

► Convexité et maximum

Une fonction f convexe sur $[a, b]$ admet un maximum global, qui est pris à une extrémité (au moins) du segment.

► Exercice :

Une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.

► Propriété :

Soit f une fonction convexe sur I et $x_0 \in I$ un point qui n'est pas l'une des extrémités de I , alors f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et on a de plus $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$.

► Corollaire :

Si f est convexe sur $[a, b]$ alors f est continue sur $]a, b[$.

Chapitre 12 Arithmétique

■ Rudiments d'arithmétique :

► **Définition :** On appelle ensemble des entiers naturels et on note $\mathbb{N}$ un ensemble ordonné *non vide* vérifiant les trois propriétés suivantes :

- N1 • toute partie non vide admet un plus petit élément.
- N2 • toute partie non vide et majorée admet un plus grand élément.
- N3 • $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

On admet qu'un tel ensemble existe et est unique à bijection croissante près.

► **Définition :** Multiples et diviseurs d'un entier.

► Propriété (division euclidienne dans $\mathbb{N}$) :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \exists ! (q, r) \in \mathbb{N} \times 0, b - 1, \quad a = bq + r$$

► **Vocabulaire :** On dit que a est le *dividende*, b le *diviseur*, q le *quotient*, r le *reste* de la division euclidienne de a par b .

► **Définition :** PGCD et PPCM de deux entiers naturels non nuls.

Convexité et minimum

Soit f une fonction convexe sur I :

- Si f admet un minimum local y_0 , il s'agit d'un minimum global.
- Si f atteint un minimum local en deux points x_1, x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, alors f est constante sur $[x_1, x_2]$.

► Propriété :

- Si f est dérivable sur I , alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I .
- Si f est deux fois dérivable sur I , alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I .

► Remarque :

On déduit de la croissance de la fonction dérivée que le graphe d'une fonction dérivable convexe est situé au dessus de ses tangentes.

Si a et b sont deux entiers non nuls, on note $a \wedge b$ le pgcd de a et b , et $a \vee b$ le ppcm de a et b .

► **Algorithme :** Algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd.

► **Propriété (propriété de Bézout) :** Si $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = a \wedge b$.

► **Propriété (de Gauss) :** Si a et b sont deux entiers premiers entre eux ($a \wedge b = 1$) et si $a \mid bc$, alors $a \mid c$.

► **Propriété :** Si a et b sont deux entiers non nuls, $ab = (a \wedge b)(a \vee b)$.

► **Définition :** Un entier positif est dit *premier* s'il admet exactement 2 diviseurs distincts dans $\mathbb{N}^*$.

► **Théorème :** Tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ est divisible par un entier premier.

► **Théorème :** Il existe une infinité d'entiers premiers.

► **Théorème :** Tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers ; on *admet* que cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Chapitre 13 Systèmes linéaires, calcul matriciel

■ Calcul matriciel :

► **Définition :** Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes (ou de type (n, p)) à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

► **Définition :** Addition de matrices de type (n, p) ; multiplication d'une matrice par une constante ; produit d'une matrice de type (n, p) par une matrice de type (p, q) .

► **Propriétés (admises) :** Le produit matriciel est pseudo-associatif, pseudo-distributif à droite et à gauche ; compatible avec la multiplication par un scalaire ; pour résumer :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}, \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}, \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}, \quad (AB)C = A(BC)$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}, \forall (B, C) \in \mathcal{M}_{p,q}^2, \quad A(B + C) = AB + AC$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}^2, \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}, \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}, \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}, \quad (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

► Exemples -- Vocabulaire :

- matrices carrées d'ordre n ;
- matrices diagonales (notation $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$) ;
- matrice identité (notation I_n) ;
- matrices triangulaires supérieures et inférieures.
- matrices élémentaires $E_{i,j}$ en taille (n, p)

■ Généralités sur les systèmes linéaires :

► **Définitions :** Équation linéaire à p inconnues ; système linéaire de n équations à p inconnues.

Matrice associée à un système linéaire.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on considère $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$(b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$, et le système :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

La matrice augmentée associée à ce système linéaire est la matrice $(A \mid B) \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ obtenue en plaçant à la droite de la matrice du système, la colonne des seconds membres.

■ Matrices inversibles :

► **Définition :** Matrices inversibles, inverse.

Propriétés des matrices inversibles (structure de groupe - sans définir l'axiomatique d'un groupe).

► **Propriété :** Le produit matriciel est associatif. Le produit de matrices carrées d'ordre n est non commutatif si $n > 1$.

► **Notation :** Symbole de Kronecker : $\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

► **Exercice :** Cas particulier du produit des matrices élémentaires (pour des matrices de tailles compatibles) : $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.

► **Définition :** Matrices d'opérations élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation.

Traduction des opérations élémentaires en produits matriciels.

Si $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les matrices carrées d'ordre n :

- $S_{i,j}^n = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$.
- $T_{i,j}^n(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$.
- Si $\lambda \neq 0$, on pose $H_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
 - $L_i \leftrightarrow L_j$ $M \leftrightarrow S_{i,j}^n M$
 - $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $M \leftrightarrow T_{i,j}^n(\lambda) M$
 - $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $M \leftrightarrow R_i(\lambda) M$

► **Propriété :** Effet de la multiplication à gauche (ou à droite - énoncé mais pas prouvé) par une matrice élémentaire.

Conséquence pour les matrices d'opérations élémentaires

► **Définition (opérations élémentaires) :** Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice :

- échange des lignes L_{i_1} et L_{i_2} : $L_{i_1} \leftrightarrow L_{i_2}$
- ajout de λL_{i_2} à L_{i_1} pour $i_1 \neq i_2$: $L_{i_1} \leftarrow L_{i_1} + \lambda L_{i_2}$
- multiplication de L_i par $\mu \neq 0$: $L_i \leftarrow \mu L_i$

► **Propriété :** Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

► **Propriété :** Si l'on passe d'un système S à un autre système S' par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de S' s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de S .

► **Propriété :** Pour un système linéaire, si on dispose d'une solution particulière s_0 , alors l'ensemble des solutions est $\{s_0 + h, h \in \mathcal{S}_H\}$, où $\mathcal{S}_H$ est l'ensemble des solutions du système homogène associé (c'est-à-dire celui ayant même matrice que le système initial, mais des seconds membres nuls).

► **Propriété :** Inverse d'un produit de matrices inversibles.

► **Propriété :** Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles et leurs inverses sont encore des matrices d'opérations élémentaires.