Chapitre 9 Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

Généralités - Continuité :

- **Définition :** Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $a \in A$; on dit que f est « *continue en* $a \in \mathbb{R}$ » si et seulement si la limite de f en a existe (*c'est suffisant vu la définition de la limite au programme*), c'est-à-dire :
$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A \cap]a-\alpha,\ a+\alpha[, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- **Propriété :** Lorsque f est définie sur un voisinage de a, f est continue en a si et seulement si les limites à gauche et à droite de f en a existent et sont égales à la valeur de f en a.
- **Exemple :** Une fonction lipschitzienne sur I est continue en tout point de I (la réciproque est fausse).
- **Définition :** Si f est définie sur un voisinage épointé V de $a \in \mathbb{R}$ on dit que f est prolongeable par continuité en a ssi il existe une fonction $\widetilde{f}$ définie sur $V \cup \{a\}$ continue en a et telle que $\widetilde{f}\,|_V = f$.
- **Propriétés opératoires et définitions :** Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide, non réduit à un point), on note $\mathscr{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
  - ◊ $\forall (f,\ g) \in \mathscr{C}(I)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda f + g \in \mathscr{C}(I)$, $fg \in \mathscr{C}(I)$ (et on dit que $\mathscr{C}(I)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
  - ◊ Si $f \in \mathscr{C}(I)$ est à valeurs non nulles, $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{C}(I)$.
  - ◊ Si $f \in \mathscr{C}(I)$ est à valeurs dans J et si $g \in \mathscr{C}(J)$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}(I)$.
  - ◊ Si $(f,\ g) \in \mathscr{C}(I)$, $|f|$, $\max(f,\ g)$ sont encore dans $\mathscr{C}(I)$.
  - ◊ La restriction d'une application continue est encore continue
  - ◊ Si $a < b < c$ et si $f\ :\ [a,\ c] \to \mathbb{R}$ est telle que $f\,|_{[a,\ c]}$ et $f\,|_{[c,\ b]}$ sont continues, alors f est continue sur $[a,\ c]$.

Théorèmes pour les fonctions continues sur un intervalle :

- **Notation pour cette partie :** *(non « homologuée »)*
On note $[\alpha \underset{,}{\leftrightsquigarrow} \beta]$ l'intervalle d'extrémités α et β (quitte à inverser les bornes de l'intervalle si elles ne sont pas dans le bon ordre).
- **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :** *(version « pratique »)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I, si $(a,\ b) \in I^2$, $a < b$, alors $\forall d \in [f(a) \underset{,}{\leftrightsquigarrow} f(b)]$, $\exists c \in [a,\ b], \quad f(c) = d$.
- **Contre-exemples :** Lorsqu'une des hypothèses du théorème n'est pas vérifiée...
- ♥ **Théorème des valeurs intermédiaires :** *(deuxième formulation)*
Si f est continue sur $[a,\ b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors $\exists c \in]a,\ b[, f(c) = 0$.
- **Théorème des valeurs intermédiaires :** *(troisième formulation)*
L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
- ♥ **Propriété :** preuve de l'équivalence des trois énoncés.
- **Théorème des bornes (admis!) :** *(version « pratique »)*
Si f est une fonction continue sur un segment $[a,\ b]$ alors f est bornée sur $[a,\ b]$ et elle atteint ses bornes.
$f\big([a,\ b]\big) = [m,\ M]$ et $\exists (\alpha,\ \beta) \in [a,\ b]^2, \quad f(\alpha) = m$ et $f(\beta) = M$.
- **Théorème des bornes (admis!) :** *(deuxième formulation)*
L'image d'un segment par une application continue est un segment.
- **Contre-exemples :** sur un intervalle ouvert...
- **Lemme (technique) :**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone sur I ssi :
$$\forall (x,\ y,\ z) \in I^3, \quad x < y < z \implies f(y) \in \Big] f(x) \underset{,}{\leftrightsquigarrow} f(z) \Big[$$
- ♥ **Théorème de la fonction réciproque :**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\ :\ I \to \mathbb{R}$, alors deux des trois propriétés suivantes impliquant la troisième :
  - ◊ f est continue sur I ;
  - ◊ f est strictement monotone sur I ;
  - ◊ f est une bijection de I sur $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- **Contre-exemples :** Lorsqu'une seule propriété est vérifiée...
- **Corollaire :** Si f est continue et bijective de l'*intervalle* I sur $f(I)$, alors f^{-1} est également continue de l'intervalle $f(I)$ sur I.
- **Définition :** On dit que $f\ :\ I \to J$ est un *homéomorphisme* (de I sur J) si :
  - ◊ f est bijective de I sur J ;
  - ◊ f continue sur I ;
  - ◊ f^{-1} est continue sur J.
- **Extensions en exercice :** Extension du théorème des valeurs intermédiaires au cas où $I =]a,\ b[$ et $\left(\lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right) < 0$.
Extension du théorème des bornes pour une fonction définie sur $I =]a,\ b[$ qui admet des limites finie en a à droite et en b à gauche.

Chapitre 10 Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle

Généralités - Dérivabilité :

- **Définition :**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), soit $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si et seulement si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ définie sur $I \setminus \{a\}$ est prolongeable par continuité en a.
Lorsque c'est le cas, $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le *nombre dérivé* de f en a, noté $f'(a)$.
- **Interprétation graphique :** le nombre dérivé de f en a (lorsqu'il existe) est la limite de la pente des cordes entre $A = \big(a,\ f(a)\big)$ et $M = \big(x,\ f(x)\big)$ lorsque M tend vers A.
- **Définition :** On parle également de dérivées à gauche et à droite si on peut prolonger la fonction précédente par continuité à gauche ou à droite (et on note les limites correspondantes : $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ respectivement).
- **Propriété :** f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.
- **Vocabulaire :** lorsque les limites précédentes existent mais sont distinctes, on dit que f admet deux demi-tangentes en a.
- **Utilisation des développements limités à l'ordre 0 et 1 :**
On dit que $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ admet un *développement limité à l'ordre 0 en* $a \in I$ et on note en abrégé que f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si et seulement s'il existe $\ell_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0\ :\ I \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ell_0 + \varepsilon_0(x) \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon_0(x) = 0$$
- **Définition :**
De même, f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si et seulement s'il existe $(\ell_0, \ell_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon_1\ :\ I \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ell_0 + \ell_1(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x) \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$$
- **Théorème :**
On dispose des équivalences suivantes :
  - « f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ » ssi « f est continue en a » (et dans ce cas $\ell_0 = f(a)$).
  - « f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ » ssi « f est dérivable en a » (et dans ce cas $\ell_0 = f(a)$, $\ell_1 = f'(a)$).

  Conséquence : Si f est dérivable en a, elle est continue en a.
- **Notations :** on a déjà introduit les notations $\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$, ...
- **Propriétés opératoires :** Si f et g sont deux applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$
  - $\forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}(I)$ et $\big(\lambda f + \mu g\big)' = \lambda f' + \mu g'$;
  - $fg \in \mathcal{D}(I)$ et $(fg)' = f'g + fg'$;
  - $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur $\{x \in I,\ g(x) \neq 0\}$ et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.
  - $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $\{x \in I,\ g(x) \neq 0\}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
- **Théorème de dérivation d'une composée :**
Soit $f\ :\ I \to J$ une application dérivable en $a \in I$ et $g\ :\ J \to K$ une application dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'\left(f(a)\right) f'(a)$.
- ♥ **Théorème de dérivation de la fonction réciproque :**
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\ :\ I \to J$ une fonction bijective, continue sur I (donc strictement monotone sur I), dérivable en $a \in I$. Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas : $\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
- **Définition :**
Un *difféomorphisme* de I sur J est une application dérivable sur I, bijective de I sur J, dont la bijection réciproque est dérivable sur J.

Théorèmes globaux pour les fonctions dérivables sur un intervalle :

- **Caractérisation des extrémums locaux d'une fonction dérivable :**
Soit $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$ (qui n'est ***pas*** une extrémité de I) et admettant un extremum local en x_0 ; alors $f'(x_0) = 0$.
Application à la caractérisation des extrémums d'une fonction.
- **Théorème de Rolle :**
Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $\big[a,\ b\big]$ et dérivable sur $\big]a,\ b\big[$; si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in \big]a,\ b\big[, \quad f'(c) = 0$.
Interprétation graphique, cinématique, contre-exemples lorsqu'une hypothèse est absente.
- ♥ **Théorème des accroissements finis (TAF) :**
Soit $f \in \mathcal{C}^0\big(\big[a,\ b\big],\ \mathbb{R}\big) \cap \mathcal{D}^1\big(\big]a,\ b\big[\big)$ (avec $a < b$), alors :
$\exists c \in \big]a,\ b\big[, \quad \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. Interprétation graphique, cinématique.
- **Application :**
Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}(I)$ une fonction à valeurs réelles

alors :

◊ f est croissante sur I ssi $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$;

◊ f est décroissante sur I ssi $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$;

◊ f est constante sur I ssi $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$;

- **Corollaire :**
  Si $f \ : \ I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I, f est strictement monotone sur I si et seulement si :
  ◊ la dérivée de f est de signe constant sur I ;
  ◊ il n'existe pas d'intervalle non réduit à un point sur lequel f' s'annule.
- **Égalité des accroissements finis :** *(« TAF 2ème version »)*
  Soit $(a, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur $[a, a+h]$ et dérivable sur $]a, a+h[$; alors :
  $$\exists \theta \in]0, 1[, \quad f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$$
- **Inégalité des accroissements finis (IAF) :** *(« 1ère version »)*
  Soit $f \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; si $\forall x \in]a, b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors :
  $$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$
- **Inégalité des accroissements finis (IAF) :** *(« 2ème version »)*
  Soit $f \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; si $\forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$.
  Application à la caractérisation des fonctions lipschitziennes, interprétation cinématique.
- **Théorème de limite de la dérivée :**
  Soit $f \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$.
  ◊ Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.
  ◊ Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ et f n'est pas dérivable en a (la courbe admet une demi-tangente verticale).
  Contre-exemple pour la réciproque : $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(Non) Extension des résultats de continuité/dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes :

- **Propriété :**
  $f \ : \ I \to \mathbb{C}$ est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ sont dérivables en x_0 et alors $f'(x_0) = (\mathbf{Re} f)'(x_0) + i\,(\mathbf{Im} f)'(x_0)$.
  Les propriétés opératoires de la dérivation (combinaison linéaire, produit, quotient) sont conservées
- **Propriété :** Si $f \ : \ I \to \mathbb{R}$ et $g \ : \ J \to \mathbb{C}$ sont dérivables sur I et J respectivement, et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \ : \ I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I (et on dispose de la formule habituelle pour la composée).
- **Propriété :** (*« Inégalité des accroissements finis »*)
  Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{C})$ et si $\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant k$ alors $|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|$.
- **Corollaire :** On conserve en particulier la caractérisation des fonctions dérivables constantes sur un intervalle pour les fonctions à valeurs complexes.
- **Ce qui n'est plus vrai :**
  Le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis, tous les énoncés où la notion de monotonie intervient…

Chapitre 11 Fonctions convexes

Définitions, propriétés

- **Définition :**
  Une fonction est convexe sur un intervalle $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point si :
  $$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
- **Propriété (inégalité de Jensen) :**
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \ : \ I \to \mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si : $\forall n \geqslant 2, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad f\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$.
- **Propriété (inégalité des pentes) :**
  Il y a équivalence entre les trois assertions suivantes :
  i) f est convexe sur I ;
  ii) $\forall (x, y, z) \in I^3, \quad x < y < z, \quad \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$;
  iii) $\forall (x, y, z) \in I^3, \ x < y < z,$
  $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$.
- **Propriété :**
  Une fonction est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, la fonction « pente issue de x » : $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.
- **Convexité et maximum**
  Une fonction f convexe sur $[a, b]$ admet un maximum global, qui est pris à une extrémité (au moins) du segment.
- **Exercice :**
  Une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.
- **Propriété :**
  Soit f une fonction convexe sur I et $x_0 \in I$ un point qui n'est pas l'une des extrémités de I, alors f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et on a de plus $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.
- **Corollaire :**
  Si f est convexe sur $[a, b]$ alors f est continue sur $]a, b[$.
- **Convexité et minimum**
  Soit f une fonction convexe sur I :
  - Si f admet un minimum local y_0, il s'agit d'un minimum global.
  - Si f atteint un minimum local en deux points x_1, x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, alors f est constante sur $[x_1, x_2]$.
- **Propriété :**
  - Si f est dérivable sur I, alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
  - Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur I.
- **Remarque :**
  On déduit de la croissance de la fonction dérivée que le graphe d'une fonction dérivable convexe est situé au dessus de ses tangentes.

Chapitre 12 Arithmétique

Rudiments d'arithmétique :

- **Définition :** On appelle ensemble des entiers naturels et on note $\mathbb{N}$ un ensemble ordonné *non vide* vérifiant les trois propriétés suivantes :
  - **N1** • toute partie non vide admet un plus petit élément.
  - **N2** • toute partie non vide et majorée admet un plus grand élément.
  - **N3** • $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

  On admet qu'un tel ensemble existe et est unique à bijection croissante près.
- **Définition :** Multiples et diviseurs d'un entier.
- **Propriété (division euclidienne dans $\mathbb{N}$) :**
  $$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \exists! (q, r) \in \mathbb{N} \times 0, b-1, \quad a = bq + r$$
- **Vocabulaire :** On dit que a est le *dividende*, b le *diviseur*, q le *quotient*, r le *reste* de la division euclidienne de a par b.
- **Définition :** PGCD et PPCM de deux entiers naturels non nuls.
  Si a et b sont deux entiers non nuls, on note $a \wedge b$ le pgcd de a et b, et $a \vee b$ le ppcm de a et b.
- **Algorithme :** Algorithme d'Euclide pour le calcul du *pgcd*.
- **Propriété (propriété de Bézout) :** Si $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = a \wedge b$.
- **Propriété (de Gauss) :** Si a et b sont deux entiers premiers entre eux ($a \wedge b = 1$) et si $a \mid bc$, alors $a \mid c$.
- **Propriété :** Si a et b sont deux entiers non nuls, $ab = (a \wedge b)(a \vee b)$.
- **Définition :** Un entier positif est dit *premier* s'il admet exactement 2 diviseurs distincts dans $\mathbb{N}^*$.
- **Théorème :** Tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ est divisible par un entier premier.
- **Théorème :** Il existe une infinité d'entiers premiers.
- **Théorème :** Tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers ; on *admet* que cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.