Semaine 15

lundi 20 jan. 2025
> samedi 25 jan. 2025

Chapitre 8 Limites de fonctions

Définitions :

- **Définition (limite en $\pm\infty$) :**
On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ (ou qu'elle admet ℓ pour limite en $+\infty$) si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant A, \qquad \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$$
Sinon, on dit que f *diverge* en $+\infty$.
On dit qu'elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si :
$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant A, \qquad f(x) \geqslant M$$
Même chose pour une limite égale à $-\infty$ ou pour une limite en $-\infty$.
- **Définition (limite en a) :**
On dit qu'une fonction f est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \big[a - \delta,\, a + \delta\big], \qquad \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$$
- **Remarque :** On étend la définition précédente au cas des limites à gauche et à droite en utilisant la restriction de f à $I \cap \,]-\infty,\, a[$ ou $I \cap \,]a,\, +\infty[$.
- **Définition :** On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si :
$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \big[a - \delta,\, a + \delta\big] \setminus \{a\}, \qquad |f(x)| \geqslant M$$

Propriétés :

- **Propriétés :** *Propriétés correspondant à celles énoncées sur les suites* (jusqu'à la notion de suite extraite).
- **Limite d'une composée de fonctions :** Soit $f \;:\; I \to J$ et $g \;:\; J \to K$ où I contient un voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et J contient un voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$.
- **Composée suites / fonctions :** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et si f est une fonction définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $\Big(f(u_n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ.
- **Caractérisation séquentielle de la limite :** Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$; il y a équivalence entre :
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
  - Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\Big(f(u_n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ.
- **Théorème de la limite monotone (fonctions) :**
Soit $I = \big]\alpha,\, \beta\big[$, $f \;:\; I \to \mathbb{R}$ une application croissante alors pour tout $a \in \,]\alpha,\, \beta[$, on a :
$$\forall a \in I, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$
On peut adapter le résultat aux fonctions décroissantes, et au cas où $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$ (en ajoutant une hypothèse de majoration ou de minoration).
On peut aussi adapter aux fonctions définies sur des intervalles de la forme $[\alpha,\, \beta[$, $]\alpha,\, \beta]$ ou $]\alpha,\, \beta[$ (en ne parlant plus des limites ou des valeurs qui n'auraient plus de sens).

Chapitre 9 Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

Généralités - Continuité :

- **Définition :** Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $a \in A$; on dit que f est « *continue en $a \in \mathbb{R}$* » si et seulement si la limite de f en a existe (*c'est suffisant vu la définition de la limite au programme*), c'est-à-dire :
$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A \cap]a - \alpha,\, a + \alpha[, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- **Propriété :** Lorsque f est définie sur un voisinage de a, f est continue en a si et seulement si les limites à gauche et à droite de f en a existent et sont égales à la valeur de f en a.
- **Exemple :** Une fonction lipschitzienne sur I est continue en tout point de I (la réciproque est fausse).
- **Définition :** Si f est définie sur un voisinage épointé V de $a \in \mathbb{R}$ on dit que f est prolongeable par continuité en a ssi il existe une fonction $\widetilde{f}$ définie sur $V \cup \{a\}$ continue en a et telle que $\widetilde{f}\,|_V = f$.
- **Propriétés opératoires et définitions :** Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide, non réduit à un point), on note $\mathscr{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
  - ◊ $\forall (f,\, g) \in \mathscr{C}(I)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda f + g \in \mathscr{C}(I)$, $fg \in \mathscr{C}(I)$ (et on dit que $\mathscr{C}(I)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
  - ◊ Si $f \in \mathscr{C}(I)$ est à valeurs non nulles, $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{C}(I)$.
  - ◊ Si $f \in \mathscr{C}(I)$ est à valeurs dans J et si $g \in \mathscr{C}(J)$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}(I)$.
  - ◊ Si $(f,\, g) \in \mathscr{C}(I)$, $|f|$, $\max(f,\, g)$ sont encore dans $\mathscr{C}(I)$.
  - ◊ La restriction d'une application continue est encore continue
  - ◊ Si $a < b < c$ et si $f \;:\; [a,\, c] \to \mathbb{R}$ est telle que $f\,|_{[a,\, c]}$ et $f\,|_{[c,\, b]}$ sont continues, alors f est continue sur $[a,\, c]$.

Théorèmes pour les fonctions continues sur un intervalle :

- **Notation pour cette partie :** *(non « homologuée »)*
On note $[\alpha \underset{,}{\leftrightsquigarrow} \beta]$ l'intervalle d'extrémités α et β (quitte à inverser les bornes de l'intervalle si elles ne sont pas dans le bon ordre).
- **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :** *(version « pratique »)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \;:\; I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I, si $(a,\, b) \in I^2$, $a < b$, alors $\forall d \in [f(a) \underset{,}{\leftrightsquigarrow} f(b)]$, $\exists c \in [a,\, b]$, $\quad f(c) = d$.
- **Contre-exemples :** Lorsqu'une des hypothèses du théorème n'est pas vérifiée...
- **Théorème des valeurs intermédiaires :** *(deuxième formulation)*
Si f est continue sur $[a,\, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors $\exists c \in]a,\, b[$, $f(c) = 0$.
- **Théorème des valeurs intermédiaires :** *(troisième formulation)*
L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
- **Propriété :** preuve de l'équivalence des trois énoncés.
- **Théorème des bornes (admis!) :** *(version « pratique »)*
Si f est une fonction continue sur un segment $[a,\, b]$ alors f est bornée sur $[a,\, b]$ et elle atteint ses bornes.
$f\big([a,\, b]\big) = [m,\, M]$ et $\exists (\alpha,\, \beta) \in [a,\, b]^2$, $\quad f(\alpha) = m$ et $f(\beta) = M$.
- **Théorème des bornes (admis!) :** *(deuxième formulation)*
L'image d'un segment par une application continue est un segment.
- **Contre-exemples :** sur un intervalle ouvert...
- **Lemme (technique) :**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \;:\; I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone sur I ssi :
$$\forall (x,\, y,\, z) \in I^3, \quad x < y < z \implies f(y) \in \Big]f(x) \underset{,}{\leftrightsquigarrow} f(z)\Big[$$
- **Théorème de la fonction réciproque :**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \;:\; I \to \mathbb{R}$, alors deux des trois propriétés suivantes impliquant la troisième :
  - ◊ f est continue sur I ;
  - ◊ f est strictement monotone sur I ;
  - ◊ f est une bijection de I sur $f\big(I\big)$ et $f\big(I\big)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- **Contre-exemples :** Lorsqu'une seule propriété est vérifiée...
- **Corollaire :** Si f est continue et bijective de l'*intervalle* I sur $f(I)$, alors f^{-1} est également continue de l'intervalle $f(I)$ sur I.
- **Définition :** On dit que $f \;:\; I \to J$ est un *homéomorphisme* (de I sur J) si :
  - ◊ f est bijective de I sur J ;
  - ◊ f continue sur I ;
  - ◊ f^{-1} est continue sur J.
- **Extensions en exercice :** Extension du théorème des valeurs intermédiaires au cas où $I = \,]a,\, b[$ et $\left(\lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right) < 0$.
Extension du théorème des bornes pour une fonction définie sur $I = \,]a,\, b[$ qui admet des limites finie en a à droite et en b à gauche.

Chapitre 10 Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle

Généralités - Dérivabilité :

- **Définition :**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), soit $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si et seulement si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ définie sur $I \setminus \{a\}$ est prolongeable par continuité en a.
Lorsque c'est le cas, $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le *nombre dérivé* de f en a, noté $f'(a)$.
- **Interprétation graphique :** le nombre dérivé de f en a (lorsqu'il existe) est la limite de la pente des cordes entre $A = \big(a,\, f(a)\big)$ et $M = \big(x,\, f(x)\big)$ lorsque M tend vers A.
- **Définition :** On parle également de dérivées à gauche et à droite si on peut prolonger la fonction précédente par continuité à gauche ou à droite (et on note les limites correspondantes : $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ respectivement).
- **Propriété :** f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.
- **Vocabulaire :** lorsque les limites précédentes existent mais sont distinctes, on dit que f admet deux demi-tangentes en a.
- **Utilisation des développements limités à l'ordre 0 et 1 :**
On dit que $f \;:\; I \to \mathbb{R}$ admet un *développement limité à l'ordre* 0 *en* $a \in I$ et on note en abrégé que f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si et seulement s'il existe $\ell_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0 \;:\; I \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ell_0 + \varepsilon_0(x) \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon_0(x) = 0$$
- **Définition :**

De même, f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si et seulement s'il existe $(\ell_0, \ell_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon_1 : I \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ell_0 + \ell_1(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$$

- **Théorème :**
On dispose des équivalences suivantes :
  - « f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ » ssi « f est continue en a » (et dans ce cas $\ell_0 = f(a)$).
  - « f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ » ssi « f est dérivable en a » (et dans ce cas $\ell_0 = f(a)$, $\ell_1 = f'(a)$).

Conséquence : Si f est dérivable en a, elle est continue en a.
- **Notations :** on a déjà introduit les notations $\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{D}^n(I)$, ...
- **Propriétés opératoires :** Si f et g sont deux applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$
  - $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}(I)$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$;
  - $fg \in \mathcal{D}(I)$ et $(fg)' = f'g + fg'$;
  - $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $\{x \in I,\ g(x) \neq 0\}$ et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
  - $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\{x \in I,\ g(x) \neq 0\}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- **Théorème de dérivation d'une composée :**
Soit $f : I \to J$ une application dérivable en $a \in I$ et $g : J \to K$ une application dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)$.
- **Théorème de dérivation de la fonction réciproque :**
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction bijective, continue sur I (donc strictement monotone sur I), dérivable en $a \in I$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas : $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.
- **Définition :**
Un *difféomorphisme* de I sur J est une application dérivable sur I, bijective de I sur J, dont la bijection réciproque est dérivable sur J.

Théorèmes globaux pour les fonctions dérivables sur un intervalle :

- **Caractérisation des extrémums locaux d'une fonction dérivable :**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$ (qui n'est ***pas*** une extrémité de I) et admettant un extremum local en x_0 ; alors $f'(x_0) = 0$.
Application à la caractérisation des extrémums d'une fonction.
- **Théorème de Rolle :**
Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0$.
Interprétation graphique, cinématique, contre-exemples lorsqu'une hypothèse est absente.
- **Théorème des accroissements finis (TAF) :**
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[)$ (avec $a < b$), alors :
$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. Interprétation graphique, cinématique.
- **Application :**
Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}(I)$ une fonction à valeurs réelles alors :
◊ f est croissante sur I ssi $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$;
◊ f est décroissante sur I ssi $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$;
◊ f est constante sur I ssi $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$;
- **Corollaire :**
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I, f est strictement monotone sur I si et seulement si :
◊ la dérivée de f est de signe constant sur I ;
◊ il n'existe pas d'intervalle non réduit à un point sur lequel f' s'annule.
- **Égalité des accroissements finis :** *(« TAF 2ème version »)*
Soit $(a, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur $[a, a+h]$ et dérivable sur $]a, a+h[$; alors :
$$\exists \theta \in]0, 1[, \quad f(a+h) - f(a) = hf'(a + \theta h)$$
- **Inégalité des accroissements finis (IAF) :** *(« 1ère version »)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; si $\forall x \in]a, b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors :
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$
- **Inégalité des accroissements finis (IAF) :** *(« 2ème version »)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; si $\forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$.
Application à la caractérisation des fonctions lipschitziennes, interprétation cinématique.
- **Théorème de limite de la dérivée :**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$.
◊ Si $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.
◊ Si $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \pm\infty$, alors $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ et f n'est pas dérivable en a (la courbe admet une demi-tangente verticale).
Contre-exemple pour la réciproque : $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

(Non) Extension des résultats de continuité/dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes :

- **Propriété :**
$f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ sont dérivables en x_0 et alors $f'(x_0) = (\mathbf{Re}f)'(x_0) + i\,(\mathbf{Im}f)'(x_0)$.
Les propriétés opératoires de la dérivation (combinaison linéaire, produit, quotient) sont conservées
- **Propriété :** Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ sont dérivables sur I et J respectivement, et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I (et on dispose de la formule habituelle pour la composée).
- **Propriété :** (*« Inégalité des accroissements finis »*)
Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{C})$ et si
$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant k$ alors $|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|$.
- **Corollaire :** On conserve en particulier la caractérisation des fonctions dérivables constantes sur un intervalle pour les fonctions à valeurs complexes.
- **Ce qui n'est plus vrai :**
Le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis, tous les énoncés où la notion de monotonie intervient...

Chapitre 11 Fonctions convexes

Définitions, propriétés

- **Définition :**
Une fonction est convexe sur un intervalle $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point si :
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
- **Propriété (inégalité de Jensen) :**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si : $\forall n \geqslant 2, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$.
- **Propriété (inégalité des pentes) :**
Il y a équivalence entre les trois assertions suivantes :
i) f est convexe sur I ;
ii) $\forall (x, y, z) \in I^3, \quad x < y < z, \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$;
iii) $\forall (x, y, z) \in I^3$, $x < y < z$, $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$.
- **Propriété :**
Une fonction est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, la fonction « pente issue de x » : $t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.
- **Convexité et maximum**
Une fonction f convexe sur $[a, b]$ admet un maximum global, qui est pris à une extrémité (au moins) du segment.