Semaine 13

lundi 6 jan. 2025
> samedi 11 jan. 2025

Chapitre 7 Suites réelles – limites et convergence

Propriétés (suites) :

- **Propriété :** Unicité de la limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$).
- **Propriété :** La limite est une *notion locale* : si deux suites coïncident à partir d'un certain rang, elles sont de même nature, et si elles admettent une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$), c'est la même.
- **Théorème de majoration :**
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\quad |u_n| < v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- **Théorème de minoration :**
Si $\forall n \geqslant n_0,\quad u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- **« Théorème des gendarmes » (ou théorème d'encadrement) :**
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que :
$$\forall n \geqslant N,\quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
- **Propriété (Conservation des inégalités larges par passage à la limite) :**
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant v_n$, de limites respectives ℓ et ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$.
- **Propriétés opératoires :**
  - Une suite convergente est bornée.
  - Une suite convergente à valeurs entières est stationnaire.
  - Toute suite convergente de limite $\ell > 0$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel $\alpha > 0$.
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
  - Extension aux limites infinies, formes indéterminées.
  - Si (u_n) est bornée et si (v_n) est de limite nulle, alors $(u_n v_n)$ est de limite nulle.
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$.
  - Extension aux limites infinies, formes indéterminées.
  - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie et bornée à partir d'un certain rang.
  - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.
- **Définition (« suite extraite ») :**
Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, on dit que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **Propriété :** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ, toutes ses suites extraites tendent vers ℓ.
- **Exercice :** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
- **Remarque :** Utilisation de la contraposée de la propriété précédente pour prouver la divergence d'une suite.

Théorèmes d'existence des limites (suites) :

- **Théorème de la limite monotone** : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante, il n'y a que deux possibilités :
  - Soit la suite est non majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.
  - Soit la suite est majorée, et alors elle est convergente.
  De plus dans ce cas, sa limite est $\sup\left(\left\{u_k,\quad k \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

  On peut adapter le résultat aux suites décroissantes (minorées ou non).
- **Définition (suites adjacentes) :**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes si (quitte à échanger les deux suites) :
  - (u_n) est croissante ;
  - (v_n) est décroissante ;
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
- **Théorème :**
Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite ℓ
(et de plus : $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$).

Retour sur les réels :

- **Caractérisation des intervalles** : Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ (en utilisant les bornes supérieures / inférieures) : un intervalle est une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,\ y) \in I^2,\quad [x,\ y] \subset I$.
- **Définition (partie entière) :** $\forall x \in \mathbb{R},\quad \exists! n \in \mathbb{Z},\quad n \leqslant x < n+1$.
On dit que n est la partie entière de x, on note $n = E(x)$ ou $n = \lfloor x \rfloor$; on peut encore écrire $E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} /\quad n \leqslant x\}$.
- **Propriété :** (analogue de la division euclidienne des entiers)
$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \exists! (q,\ r) \in \mathbb{Z} \times [0,\ b[,\quad a = bq + r$.
- **Propriétés élémentaires :**
  - $\forall x \in \mathbb{R},\quad x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z},\quad \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.
  - $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$
- **Définition :** Rappel de la définition des rationnels, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$.
- **Propriétés élémentaires :** la somme de deux rationnels est un rationnel, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle, on ne peut rien dire pour la somme de deux irrationnels…
-

Propriété :
- $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, $\exists z \in \mathbb{Q},\quad x < z < y$;
- $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, $\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\quad x < z < y$.

- **Définition :** Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *dense dans* $\mathbb{R}$ si tout intervalle non vide $]u,\ v[$ rencontre A ($A \cap]u,\ v[\neq \varnothing$).
- **Caractérisation séquentielle des bornes sup / inf :**
Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée, il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers $\sup A$ (en étant *soigneux*, on pourrait choisir une suite croissante). Si A n'est pas majorée, on peut construire une suite à valeurs dans A qui tend vers $+\infty$.
On résume en disant que $\sup A$ est la plus grande limite possible d'une suite convergente d'éléments de A.
- **Caractérisation séquentielle de la densité :**
Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A.
- **Exemple classique :** les suites d'approximations décimales à 10^{-p} par défaut et par excès de $x \in \mathbb{R}$ forment des suites adjacentes.

Relations asymptotiques

- **Définition :** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi :
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\quad |x_n| \leqslant \lambda |y_n|$$
On dit que $x_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(y_n)$ (« x_n est un grand O de y_n »).
En pratique, on suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne s'annule pas et on a donc $x_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(y_n)$ si et seulement si $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- **Propriété :** Les propriétés suivantes sont équivalentes : $x_n = \mathcal{O}(y_n)$, $|x_n| = \mathcal{O}(y_n)$, $x_n = \mathcal{O}(|y_n|)$, $|x_n| = \mathcal{O}(|y_n|)$, $x_n = \mathcal{O}(42 y_n)$, $42 x_n = \mathcal{O}(y_n)$.
- **Définition :** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\quad |x_n| \leqslant \varepsilon |y_n|$$
On dit que $x_n \underset{+\infty}{=} o(y_n)$ (« x_n est un petit o de y_n »).
En pratique, on suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne s'annule pas et on a donc $x_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(y_n)$ si et seulement si $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
- **Propriété :** Les propriétés suivantes sont équivalentes : $x_n = o(y_n)$, $|x_n| = o(y_n)$, $x_n = o(|y_n|)$, $|x_n| = o(|y_n|)$, $x_n = o(42 y_n)$, $42 x_n = o(y_n)$.
- **Propriété :** $x_n = o(y_n) \implies x_n = \mathcal{O}(y_n)$.
- **Définition :** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi : $x_n - y_n = o(y_n)$, et on note $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$.
En pratique, on suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne s'annule pas et on a donc $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$ si et seulement si $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

- **Propriétés opératoires des symboles o, $\mathcal{O}$ et $\sim$.**
  - o et $\mathcal{O}$ sont des relations transitives.
  - $\begin{cases} x_n = o(y_n) \\ y_n = \mathcal{O}(z_n) \end{cases} \implies x_n = o(z_n)$.
  - $\begin{cases} x_n = \mathcal{O}(y_n) \\ y_n = o(z_n) \end{cases} \implies x_n = o(z_n)$.
  - Stabilité des relations o, $\mathcal{O}$ et $\sim$ pour le produit.
  - Si $x_n = o(z_n)$ et $y_n = o(z_n)$, alors $x_n + y_n = o(z_n)$.
  - Si $x_n = \mathcal{O}(z_n)$ et $y_n = \mathcal{O}(z_n)$, alors $x_n + y_n = \mathcal{O}(z_n)$.
  - Si $x_n = \mathcal{O}(y_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
  - **On n'ajoute pas les équivalents (sans explication) !**
  - **Remarque :** aucune propriété concernant le passage à l'exponentielle / logarithme d'une équivalence n'a été donné ; elles devront être redémontrées selon les besoins.
  - Si $u_n \sim v_n$, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.
- **Propriété :**
$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases},\quad \lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a \in]0,\ 1[\end{cases}.$$
- **Propriété :**
Si (u_n) est une suite à valeurs non nulles et si $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}| = \ell$, alors :
  - Si $\ell > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$;
  - Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire ;
  - Si $\ell < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- **Propriété (comparaison logarithmique) :**
Si (x_n) et (y_n) sont deux suites de réels strictement positifs telles que : $\forall n \geqslant n_0,\quad \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$; alors $x_n = \mathcal{O}(y_n)$.

Suites de référence :

- **Propriété :**
  - Si $0 < a < b$, $a^n = o(b^n)$;
  - Si $\alpha_1 < \alpha_2$, $n^{\alpha_1} = o(n^{\alpha_2})$;
  - Si $\beta_1 < \beta_2$, $(\ln n)^{\beta_1} = o\left((\ln n)^{\beta_2}\right)$.
- **Théorème :**
  Si on note $\ll$ la relation « être négligeable » pour les besoins de l'énoncé :
  $$a^n \ll n^\alpha \ll (\ln n)^\beta \ll n^{\alpha'} \ll b^n \ll n! \ll n^n$$
  avec $0 < a < 1$, $\alpha < 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha' > 0$ et $b > 1$.

Chapitre 8 Limites de fonctions

Définitions :

- **Définition (limite en $\pm\infty$) :**
  On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ (ou qu'elle admet ℓ pour limite en $+\infty$) si :
  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant A, \qquad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
  Sinon, on dit que f *diverge* en $+\infty$.
  On dit qu'elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si :
  $$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant A, \qquad f(x) \geqslant M$$
  Même chose pour une limite égale à $-\infty$ ou pour une limite en $-\infty$.
- **Définition (limite en a) :**
  On dit qu'une fonction f est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si :
  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in [a - \delta, a + \delta], \qquad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- **Remarque :** On étend la définition précédente au cas des limites à gauche et à droite en utilisant la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ ou $I \cap]a, +\infty[$.
- **Définition :** On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si :
  $$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in [a - \delta, a + \delta] \setminus \{a\}, \qquad |f(x)| \geqslant M$$

Propriétés :

- **Propriétés :** *Propriétés correspondant à celles énoncées sur les suites* (jusqu'à la notion de suite extraite).
- **Limite d'une composée de fonctions :** Soit $f : I \to J$ et $g : J \to K$ où I contient un voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et J contient un voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$.
- **Composée suites / fonctions :** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et si f est une fonction définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $\left(f(u_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ.
- **Caractérisation séquentielle de la limite :** Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$; il y a équivalence entre :
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
  - Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\left(f(u_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ.
- **Théorème de la limite monotone (fonctions) :**
  Soit $I = [\alpha, \beta]$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application croissante alors pour tout $a \in]\alpha, \beta[$, on a :
  $$\forall a \in I, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$
  On peut adapter le résultat aux fonctions décroissantes, et au cas où $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$ (en ajoutant une hypothèse de majoration ou de minoration).
  On peut aussi adapter aux fonctions définies sur des intervalles de la forme $[\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta]$ ou $]\alpha, \beta[$ (en ne parlant plus des limites ou des valeurs qui n'auraient plus de sens).

Chapitre 9 Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

Généralités - Continuité :

- **Définition :** Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $a \in A$; on dit que f est « *continue en* $a \in \mathbb{R}$ » si et seulement si la limite de f en a existe (*c'est suffisant vu la définition de la limite au programme*), c'est-à-dire :
  $$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- **Propriété :** Lorsque f est définie sur un voisinage de a, f est continue en a si et seulement si les limites à gauche et à droite de f en a existent et sont égales à la valeur de f en a.
- **Exemple :** Une fonction lipschitzienne sur I est continue en tout point de I (la réciproque est fausse).
- **Définition :** Si f est définie sur un voisinage épointé V de $a \in \mathbb{R}$ on dit que f est prolongeable par continuité en a ssi il existe une fonction $\widetilde{f}$ définie sur $V \cup \{a\}$ continue en a et telle que $\widetilde{f}\,|_V = f$.
- **Propriétés opératoires et définitions :** Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide, non réduit à un point), on note $\mathscr{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
  - ◇ $\forall (f, g) \in \mathscr{C}(I)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g \in \mathscr{C}(I)$, $fg \in \mathscr{C}(I)$ (et on dit que $\mathscr{C}(I)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
  - ◇ Si $f \in \mathscr{C}(I)$ est à valeurs non nulles, $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{C}(I)$.
  - ◇ Si $f \in \mathscr{C}(I)$ est à valeurs dans J et si $g \in \mathscr{C}(J)$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}(I)$.
  - ◇ Si $(f, g) \in \mathscr{C}(I)$, $|f|$, $\max(f, g)$ sont encore dans $\mathscr{C}(I)$.
  - ◇ La restriction d'une application continue est encore continue
  - ◇ Si $a < b < c$ et si $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ est telle que $f\,|_{[a,\,c]}$ et $f\,|_{[c,\,b]}$ sont continues, alors f est continue sur $[a, c]$.

Théorèmes pour les fonctions continues sur un intervalle :

- **Notation pour cette partie :** *(non « homologuée »)*
  On note $[\alpha \leftrightsquigarrow \beta]$ l'intervalle d'extrémités α et β (quitte à inverser les bornes de l'intervalle si elles ne sont pas dans le bon ordre).
- **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :** *(version « pratique »)*
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I, si $(a, b) \in I^2$, $a < b$, alors $\forall d \in [f(a) \leftrightsquigarrow f(b)]$, $\exists c \in [a, b]$, $\quad f(c) = d$.
- **Contre-exemples :** Lorsqu'une des hypothèses du théorème n'est pas vérifiée...
- **Théorème des valeurs intermédiaires :** *(deuxième formulation)*
  Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors $\exists c \in]a, b[, f(c) = 0$.
- **Théorème des valeurs intermédiaires :** *(troisième formulation)*
  L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
- **Propriété :** preuve de l'équivalence des trois énoncés.
- **Théorème des bornes (admis!) :** *(version « pratique »)*
  Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et elle atteint ses bornes.
  $f([a, b]) = [m, M]$ et $\exists (\alpha, \beta) \in [a, b]^2$, $\quad f(\alpha) = m$ et $f(\beta) = M$.
- **Théorème des bornes (admis!) :** *(deuxième formulation)*
  L'image d'un segment par une application continue est un segment.
- **Contre-exemples :** sur un intervalle ouvert...
- **Lemme (technique) :**
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone sur I ssi :
  $$\forall (x, y, z) \in I^3, \quad x < y < z \implies f(y) \in \left]f(x) \leftrightsquigarrow f(z)\right[$$
- **Théorème de la fonction réciproque :**
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, alors deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :
  - ◇ f est continue sur I ;
  - ◇ f est strictement monotone sur I ;
  - ◇ f est une bijection de I sur $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- **Contre-exemples :** Lorsqu'une seule propriété est vérifiée...
- **Corollaire :** Si f est continue et bijective de l'*intervalle* I sur $f(I)$, alors f^{-1} est également continue de l'intervalle $f(I)$ sur I.
- **Définition :** On dit que $f : I \to J$ est un *homéomorphisme* (de I sur J) si :
  - ◇ f est bijective de I sur J ;
  - ◇ f continue sur I ;
  - ◇ f^{-1} est continue sur J.
- **Extensions en exercice :** Extension du théorème des valeurs intermédiaires au cas où $I =]a, b[$ et $\left(\lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right) < 0$.
  Extension du théorème des bornes pour une fonction définie sur $I =]a, b[$ qui admet des limites finie en a à droite et en b à gauche.