



Chapitre 6 Équations différentielles linéaires, Calculs de primitives

■ Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

► **Définition :** On considère maintenant l'équation :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

avec a, b, c des **constants**, $a \neq 0$ et d une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

On appelle « *équation caractéristique* », l'équation : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

► **Théorème (ordre 2, linéaire, coefficients constants, homogène, complexe) :**

Solutions de l'équation homogène à valeurs complexes :

- Si $\Delta \neq 0$, $\mathcal{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $(x \mapsto e^{\lambda_1 x}, x \mapsto e^{\lambda_2 x})$, avec λ_1 et λ_2 les racines complexes de l'équation caractéristique.
- Si $\Delta = 0$, $\mathcal{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $(x \mapsto e^{\lambda_0 x}, x \mapsto xe^{\lambda_0 x})$, avec λ_0 la racine double.

► **Théorème (deuxième ordre, linéaire, coefficients constants, réelle) :**

Solutions de l'équation homogène à valeurs réelles (avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$) :

- Si $\Delta > 0$, $\mathcal{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $(x \mapsto e^{\lambda_1 x}, x \mapsto e^{\lambda_2 x})$, avec λ_1 et λ_2 les racines réelles de l'équation caractéristique.
- Si $\Delta = 0$, $\mathcal{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $(x \mapsto e^{\lambda_0 x}, x \mapsto xe^{\lambda_0 x})$, avec λ_0 la racine double.
- Si $\Delta < 0$, $\mathcal{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille libre $(x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\beta x), x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\beta x))$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que les racines (complexes conjuguées) de l'équation caractéristique soient $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.

► **Remarque :** méthode de recherche de solutions particulières lorsque le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)e^{mt}$ avec P une fonction polynomiale (énoncé sans démonstration).

► **En exercice :** résolution de l'équation générale avec second membre quelconque (continu).

► **Propriété :** Étude du problème de Cauchy.

Chapitre 7 Suites réelles – limites et convergence

■ Complément sur les réels :

► **Définition :** On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{R}$ muni de deux lois de composition interne $+$ et $\cdot$, et d'une relation d'ordre $\leq$ telles que :

◊ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a une structure de corps.

◊ $\leq$ est une relation d'ordre total ; qui est *compatible* avec les opérations du corps, c'est-à-dire :

- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \implies x + z \leq y + z$;
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R}_+, x \leq y \implies xz \leq yz$

◊ Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ (c'est le résumé des deux

points précédents) vérifie la *propriété de la borne supérieure* : « toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure ».

► **Remarque :** la compatibilité de $\leq$ avec les lois du corps permet d'assurer que la propriété correspondante sur les bornes inférieures est également vérifiée.

On en profite pour donner les définitions de « majorant », « minorant », « maximum », « minimum », « borne supérieure » et « borne inférieure » dans le cadre des réels.

■ Définition d'une limite (suites) :

► **Définition (limite finie) :**

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* (ou qu'elle admet une limite finie) s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

► **Remarque :** Il y a équivalence entre $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \ell = 0$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

► **Définition (limite infinie) :**

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$) si : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq M$.

Même chose pour $-\infty$.

■ Propriétés (suites) :

► **Propriété :** Unicité de la limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

► **Propriété :** La limite est une *notion locale* : si deux suites coïncident à partir d'un certain rang, elles sont de même nature, et si elles admettent une limite (dans $\mathbb{R}$), c'est la même.

► **Théorème de majoration :**

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| < v_n$ et si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

► **Théorème de minoration :**

Si $\forall n \geq n_0, u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

► **« Théorème des gendarmes » (ou théorème d'encadrement) :**

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont trois suites telles que :

$$\forall n \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$$

et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

► **Propriété (Conservation des inégalités larges par passage à la limite) :**

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, de limites respectives ℓ et ℓ' , alors $\ell \leq \ell'$.

► **Propriétés opératoires :**

- Une suite convergente est bornée.
- Une suite convergente à valeurs entières est stationnaire.
- Toute suite convergente de limite $\ell > 0$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel $\alpha > 0$.

• Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.

• Extension aux limites infinies, formes indéterminées.

• Si (u_n) est bornée et si (v_n) est de limite nulle, alors $(u_n v_n)$ est de limite nulle.

• Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \ell \ell'$.

• Extension aux limites infinies, formes indéterminées.

• Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite définie et bornée à partir d'un certain rang.

• Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.

► **Définition (« suite extraite ») :**

Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, on dit que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

► **Propriété :** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ , toutes ses suites extraites tendent vers ℓ .

► **Exercice :** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

► **Remarque :** Utilisation de la contraposée de la propriété précédente pour prouver la divergence d'une suite.

■ Théorèmes d'existence des limites (suites) :

► **Théorème de la limite monotone :** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante, il n'y a que deux possibilités :

- Soit la suite est non majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.
- Soit la suite est majorée, et alors elle est convergente.

De plus dans ce cas, sa limite est $\sup\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$.

On peut adapter le résultat aux suites décroissantes (minorées ou non).

► **Définition (suites adjacentes) :**

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes si (quitte

à échanger les deux suites) :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

► **Théorème :**

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite ℓ

(et de plus : $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} v_n$).

■ Retour sur les réels :

- **Caractérisation des intervalles** : Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ (en utilisant les bornes supérieures / inférieures) : un intervalle est une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in I^2, [x, y] \subset I$.
- **Définition (partie entière)** : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$.
On dit que n est la partie entière de x , on note $n = E(x)$ ou $n = \lfloor x \rfloor$; on peut encore écrire $E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$.
- **Propriété** : (analogue de la division euclidienne des entiers)
 $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \exists ! (q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, b[, a = bq + r$.
- **Propriétés élémentaires** :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.
 - $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Définition** : Rappel de la définition des rationnels, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.
- **Propriétés élémentaires** : la somme de deux rationnels est un rationnel, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle, on ne peut rien dire pour la somme de deux irrationnels...

■ Relations asymptotiques

- **Définition** : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ssi :
 $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |x_n| \leq \lambda |y_n|$
On dit que $x_n = \mathcal{O}(y_n)$ (« x_n est un grand $\mathcal{O}$ de y_n »).
En pratique, on suppose que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui ne s'annule pas et on a donc $x_n = \mathcal{O}(y_n)$ si et seulement si $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- **Propriété** : Les propriétés suivantes sont équivalentes : $x_n = \mathcal{O}(y_n)$, $|x_n| = \mathcal{O}(y_n)$, $x_n = \mathcal{O}(|y_n|)$, $|x_n| = \mathcal{O}(|y_n|)$, $x_n = \mathcal{O}(42y_n)$, $42x_n = \mathcal{O}(y_n)$.
- **Définition** : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ssi :
 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |x_n| \leq \varepsilon |y_n|$
On dit que $x_n = o(y_n)$ (« x_n est un petit o de y_n »).

► Propriétés opératoires des symboles o , $\mathcal{O}$ et $\sim$.

- o et $\mathcal{O}$ sont des relations transitives.
- $\begin{cases} x_n = o(y_n) \\ y_n = \mathcal{O}(z_n) \end{cases} \implies x_n = o(z_n)$.
- $\begin{cases} x_n = \mathcal{O}(y_n) \\ y_n = o(z_n) \end{cases} \implies x_n = o(z_n)$.
- Stabilité des relations o , $\mathcal{O}$ et $\sim$ pour le produit.
- Si $x_n = o(z_n)$ et $y_n = o(z_n)$, alors $x_n + y_n = o(z_n)$.
- Si $x_n = \mathcal{O}(z_n)$ et $y_n = \mathcal{O}(z_n)$, alors $x_n + y_n = \mathcal{O}(z_n)$.
- Si $x_n = \mathcal{O}(y_n)$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.
- On n'ajoute pas les équivalents (sans explication) !
- **Remarque** : aucune propriété concernant le passage à l'exponentielle / logarithme d'une équivalence n'a été donné ; elles devront être redémontrées selon les besoins.

■ Suites de référence :

► Propriété :

- Si $0 < a < b$, $a^n = o(b^n)$;
- Si $\alpha_1 < \alpha_2$, $n^{\alpha_1} = o(n^{\alpha_2})$;
- Si $\beta_1 < \beta_2$, $(\ln n)^{\beta_1} = o((\ln n)^{\beta_2})$.

Propriété :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, $\exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y$;
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, $\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x < z < y$.

- **Définition** : Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *dense dans* $\mathbb{R}$ si tout intervalle non vide $]u, v[$ rencontre A ($A \cap]u, v[\neq \emptyset$).
- **Caractérisation séquentielle des bornes sup / inf** :
Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée, il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers $\sup A$ (en étant *soigneux*, on pourrait choisir une suite croissante). Si A n'est pas majorée, on peut construire une suite à valeurs dans A qui tend vers $+\infty$.
On résume en disant que $\sup A$ est la plus grande limite possible d'une suite convergente d'éléments de A .
- **Caractérisation séquentielle de la densité** :
Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A .
- **Exemple classique** : les suites d'approximations décimales à 10^{-p} par défaut et par excès de $x \in \mathbb{R}$ forment des suites adjacentes.

En pratique, on suppose que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui ne s'annule pas et on a donc $x_n = \mathcal{O}(y_n)$ si et seulement si $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

- **Propriété** : Les propriétés suivantes sont équivalentes : $x_n = o(y_n)$, $|x_n| = o(|y_n|)$, $x_n = o(42y_n)$, $42x_n = o(y_n)$.
- **Propriété** : $x_n = o(y_n) \implies x_n = \mathcal{O}(y_n)$.
- **Définition** : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ssi : $x_n - y_n = o(y_n)$, et on note $x_n \sim y_n$.

En pratique, on suppose que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui ne s'annule pas et on a donc $x_n \sim y_n$ si et seulement si $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.

- Si $u_n \sim v_n$, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

► Propriété :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a \in]0, 1[\end{cases} \end{cases}$$

► Propriété :

Si (u_n) est une suite à valeurs non nulles et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$, alors :

- Si $\ell > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$;
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire ;
- Si $\ell < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

► Propriété (comparaison logarithmique) :

Si (x_n) et (y_n) sont deux suites de réels strictement positifs telles que :
 $\forall n \geq n_0, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$; alors $x_n = \mathcal{O}(y_n)$.

Chapitre 8 Limites de fonctions

■ Définitions :

- **Définition (limite en $\pm\infty$)** :
On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ (ou qu'elle admet ℓ pour limite en $+\infty$) si :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
Sinon, on dit que f *diverge* en $+\infty$.
On dit qu'elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si :
 $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, f(x) \geq M$
Même chose pour une limite égale à $-\infty$ ou pour une limite en $-\infty$.
- **Définition (limite en a)** :

■ Propriétés :

- **Propriétés** : Propriétés correspondant à celles énoncées sur les suites (jusqu'à la notion de suite extraite).
- **Limite d'une composée de fonctions** : Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow K$ où I contient un voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et J contient un voisinage de $b \in \mathbb{R}$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$.
- **Composée suites / fonctions** : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite $a \in \mathbb{R}$ et si f est une fonction définie au voisinage de a telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$,

On dit qu'une fonction f est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [a - \delta, a + \delta], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- **Remarque** : On étend la définition précédente au cas des limites à gauche et à droite en utilisant la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ ou $I \cap]a, +\infty[$.
- **Définition** : On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in [a - \delta, a + \delta] \setminus \{a\}, |f(x)| \geq M$$

alors $\left(f(u_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ .

- **Caractérisation séquentielle de la limite** : Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$; il y a équivalence entre :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
- Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite $a \in \mathbb{R}$, $\left(f(u_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ .