Semaine 11

lundi 9 déc. 2024
> samedi 14 déc. 2024

Chapitre 6 Équations différentielles linéaires, Calculs de primitives

Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

- **Définition :** On considère maintenant l'équation :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

avec a, b, c des **constantes**, $a \neq 0$ et d une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
On appelle « *équation caractéristique* », l'équation : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- **Théorème (ordre 2, linéaire, coefficients constants, homogène, complexe) :**
Solutions de l'équation homogène à valeurs complexes :
  - Si $\Delta \neq 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\right)$, avec λ_1 et λ_2 les racines complexes de l'équation caractéristique.
  - Si $\Delta = 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_0 x}, x \mapsto x\mathrm{e}^{\lambda_0 x}\right)$, avec λ_0 la racine double.

- **Théorème (deuxième ordre, linéaire, coefficients constants, réelle) :**
Solutions de l'équation homogène à valeurs réelles (avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$) :
  - Si $\Delta > 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\right)$, avec λ_1 et λ_2 les racines réelles de l'équation caractéristique.
  - Si $\Delta = 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_0 x}, x \mapsto x\mathrm{e}^{\lambda_0 x}\right)$, avec λ_0 la racine double.
  - Si $\Delta < 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille libre $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que les racines (complexes conjuguées) de l'équation caractéristique soient $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.
- **Remarque :** méthode de recherche de solutions particulières lorsque le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec P une fonction polynomiale (énoncé sans démonstration).
- **En exercice :** résolution de l'équation générale avec second membre quelconque (continu).
- **Propriété :** Étude du problème de Cauchy.

Chapitre 7 Suites réelles - limites et convergence

Complément sur les réels :

- **Définition :** On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{R}$ muni de deux lois de composition interne $+$ et $\cdot$, et d'une relation d'ordre $\leqslant$ telles que :
  - ◊ $(\mathbb{R}, +, .)$ a une structure de corps.
  - ◊ $\leqslant$ est une relation d'ordre total ; qui est *compatible* avec les opérations du corps, c'est-à-dire :
    - $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;
    - $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant y \implies xz \leqslant yz$
  - ◊ Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, ., \leqslant)$ (c'est le résumé des deux points précédents) vérifie ***la propriété de la borne supérieure*** : « *toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure* ».
- **Remarque :** la compatibilité de $\leqslant$ avec les lois du corps permet d'assurer que la propriété correspondante sur les bornes inférieures est également vérifiée.
On en profite pour donner les définitions de « majorant », « minorant », « maximum », « minimum », « borne supérieure » et « borne inférieure » dans le cadre des réels.

Définition d'une limite (suites) :

- **Définition (limite finie) :**
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* (ou qu'elle admet une limite finie) s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.
- **Remarque :** Il y a équivalence entre $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.
- **Définition (limite infinie) :**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$) si : $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \geqslant M$.
Même chose pour $-\infty$.

Propriétés (suites) :

- **Propriété :** Unicité de la limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$).
- **Propriété :** La limite est une *notion locale* : si deux suites coïncident à partir d'un certain rang, elles sont de même nature, et si elles admettent une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$), c'est la même.
- **Théorème de majoration :**
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n| < v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- **Théorème de minoration :**
Si $\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- **« Théorème des gendarmes » (ou théorème d'encadrement) :**
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que :

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
- **Propriété (Conservation des inégalités larges par passage à la limite) :**
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$, de limites respectives ℓ et ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$.
- **Propriétés opératoires :**
  - Une suite convergente est bornée.
  - Une suite convergente à valeurs entières est stationnaire.
  - Toute suite convergente de limite $\ell > 0$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel $\alpha > 0$.
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
  - Extension aux limites infinies, formes indéterminées.
  - Si (u_n) est bornée et si (v_n) est de limite nulle, alors $(u_n v_n)$ est de limite nulle.
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$.
  - Extension aux limites infinies, formes indéterminées.
  - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie et bornée à partir d'un certain rang.
  - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.
- **Définition (« suite extraite ») :**
Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, on dit que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **Propriété :** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ, toutes ses suites extraites tendent vers ℓ.
- **Exercice :** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
- **Remarque :** Utilisation de la contraposée de la propriété précédente pour prouver la divergence d'une suite.

Théorèmes d'existence des limites (suites) :

- **Théorème de la limite monotone** : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante, il n'y a que deux possibilités :
  - Soit la suite est non majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.
  - Soit la suite est majorée, et alors elle est convergente.
    De plus dans ce cas, sa limite est $\sup\left(\left\{u_k, \quad k \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

  On peut adapter le résultat aux suites décroissantes (minorées ou non).
- **Définition (suites adjacentes) :**
  On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes si (quitte à échanger les deux suites) :
  - (u_n) est croissante ;
  - (v_n) est décroissante ;
  - $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.
- **Théorème :**
  Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite ℓ (et de plus : $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$).

Retour sur les réels :

- **Caractérisation des intervalles** : Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ (en utilisant les bornes supérieures / inférieures) : un intervalle est une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x, y) \in I^2, \quad [x, y] \subset I$.
- **Définition (partie entière) :** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists! n \in \mathbb{Z}, \quad n \leqslant x < n+1$.
  On dit que n est la partie entière de x, on note $n = E(x)$ ou $n = \lfloor x \rfloor$; on peut encore écrire $E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \ / \quad n \leqslant x\}$.
- **Propriété :** (analogue de la division euclidienne des entiers)
  $\forall(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, \ \exists!(q, r) \in \mathbb{Z}\times[0, b[, \quad a = bq + r$.
- **Propriétés élémentaires :**
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall p \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.
  - $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$
- **Définition :** Rappel de la définition des rationnels, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \neq \varnothing$.
- **Propriétés élémentaires :** la somme de deux rationnels est un rationnel, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle, on ne peut rien dire pour la somme de deux irrationnels...
-
- **Propriété :**
  - $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, $\exists z \in \mathbb{Q}, \qquad x < z < y$;
  - $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, $\exists z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \qquad x < z < y$.
- **Définition :** Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *dense dans* $\mathbb{R}$ si tout intervalle non vide $]u, v[$ rencontre A ($A \cap]u, v[\neq \varnothing$).
- **Caractérisation séquentielle des bornes sup / inf :**
  Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée, il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers $\sup A$ (en étant *soigneux*, on pourrait choisir une suite croissante). Si A n'est pas majorée, on peut construire une suite à valeurs dans A qui tend vers $+\infty$.
  On résume en disant que $\sup A$ est la plus grande limite possible d'une suite convergente d'éléments de A.
- **Caractérisation séquentielle de la densité :**
  Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A.
- **Exemple classique :** les suites d'approximations décimales à 10^{-p} par défaut et par excès de $x \in \mathbb{R}$ forment des suites adjacentes.

Relations asymptotiques

- **Définition :** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi :
  $$\exists\lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists p \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant p, \quad |x_n| \leqslant \lambda|y_n|$$
  On dit que $x_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(y_n)$ (« x_n est un grand O de y_n »).
  En pratique, on suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne s'annule pas et on a donc $x_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(y_n)$ si et seulement si $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- **Propriété :** Les propriétés suivantes sont équivalentes : $x_n = \mathcal{O}(y_n)$, $|x_n| = \mathcal{O}(y_n)$, $x_n = \mathcal{O}(|y_n|)$, $|x_n| = \mathcal{O}(|y_n|)$, $x_n = \mathcal{O}(42y_n)$, $42x_n = \mathcal{O}(y_n)$.
- **Définition :** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi :
  $$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists p \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant p, \quad |x_n| \leqslant \varepsilon|y_n|$$
  On dit que $x_n \underset{+\infty}{=} o(y_n)$ (« x_n est un petit o de y_n »).
  En pratique, on suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne s'annule pas et on a donc $x_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(y_n)$ si et seulement si $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
- **Propriété :** Les propriétés suivantes sont équivalentes : $x_n = o(y_n)$, $|x_n| = o(y_n)$, $x_n = o(|y_n|)$, $|x_n| = o(|y_n|)$, $x_n = o(42y_n)$, $42x_n = o(y_n)$.
- **Propriété :** $x_n = o(y_n) \implies x_n = \mathcal{O}(y_n)$.
- **Définition :** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi : $x_n - y_n = o(y_n)$, et on note $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$.
  En pratique, on suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne s'annule pas et on a donc $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$ si et seulement si $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

- **Propriétés opératoires des symboles o, $\mathcal{O}$ et $\sim$.**
  - o et $\mathcal{O}$ sont des relations transitives.
  - $\begin{cases} x_n = o(y_n) \\ y_n = \mathcal{O}(z_n) \end{cases} \implies x_n = o(z_n)$.
  - $\begin{cases} x_n = \mathcal{O}(y_n) \\ y_n = o(z_n) \end{cases} \implies x_n = o(z_n)$.
  - Stabilité des relations o, $\mathcal{O}$ et $\sim$ pour le produit.
  - Si $x_n = o(z_n)$ et $y_n = o(z_n)$, alors $x_n + y_n = o(z_n)$.
  - Si $x_n = \mathcal{O}(z_n)$ et $y_n = \mathcal{O}(z_n)$, alors $x_n + y_n = \mathcal{O}(z_n)$.
  - Si $x_n = \mathcal{O}(y_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
  - **On n'ajoute pas les équivalents (sans explication) !**
  - **Remarque :** aucune propriété concernant le passage à l'exponentielle / logarithme d'une équivalence n'a été donné ; elles devront être redémontrées selon les besoins.
  - Si $u_n \sim v_n$, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.
- **Propriété :**
  $$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}, \quad \lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a \in]0, 1[\end{cases}.$$
- **Propriété :**
  Si (u_n) est une suite à valeurs non nulles et si $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}| = \ell$, alors :
  - Si $\ell > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$;
  - Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire ;
  - Si $\ell < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.