Semaine 10

lundi 2 déc. 2024
> samedi 7 déc. 2024

Chapitre 6 Équations différentielles linéaires, Calculs de primitives

Premières propriétés -- généralités :

Intégrale et primitive

- **Théorème fondamental (admis) :**
  Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I, $a \in I$ et la fonction $F \ : \ x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ définie sur I.
  F est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est f.
- **Définition :** *primitive sur un segment.* On dit que $F \ : \ [a,\, b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f \ : \ [a,\, b] \to \mathbb{R}$ si elle est dérivable et si $F' = f$.
- **Corollaire 1 :** Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I. L'ensemble des primitives d'une fonction f continue sur I est, si $a \in I$: $\left\{ x \mapsto \int_a^x f + C, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$.
- **Corollaire 2 :** Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{R})$, si $(a,\, b) \in I^2$, et si h est une primitive (quelconque) de f sur I, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = h(b) - h(a)$.
- **Formule d'intégration par parties :**
  Soit $(f,\, g) \in \left(\mathcal{C}^1([a,\, b],\, \mathbb{R})\right)^2$, alors : $\int_a^b f'g = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b fg'$.
- **Formule de changement de variable $\mathcal{C}^1$:**
  Soit $\varphi \ : \ [\alpha,\, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; on note $[a,\, b] = \varphi([\alpha,\, \beta])$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,\, b],\, \mathbb{R})$; alors : $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi'$.
- **Application :** Intégrales de fonctions périodiques, paires, impaires...
- **Primitives usuelles**
  Les primitives des fonctions suivantes doivent être connues (***avec leur domaine de définition***) :

$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$
$x \mapsto \cos(x)$		$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$

- **Remarque :**
  à ce niveau, aucune théorie générale n'a été donnée pour les fractions rationnelles ou les fractions en cos, sin.
  En plus des primitives usuelles et des composées de fonctions, les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ et celles de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{mx}\cos(kx)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^{mx}\sin(kx)$ sont traitées dans le cours.
  Pour les autres intégrales, on donnera une indication sur les changements de variables éventuels.

Équations linéaires d'ordre 1 :

- **Théorème (premier ordre, linéaire, homogène, résolue) :**
  On considère $x \mapsto a(x)$ une fonction continue sur I et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :
  $$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (H)$$
  L'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions de la forme $y = \lambda \mathrm{e}^A$, où A est une primitive de $-a$ et λ une constante réelle ou complexe (selon que l'on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
  On dispose de la notation intégrale suivante, en fixant $t_0 \in I$:
  $$\mathscr{S}_H = \left\{ t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t a(u)\ \mathrm{d}u},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
- **Notation :** On *tolère* l'abus de notation suivant pour écrire l'équation (et seulement pour cela) : $y' + a(x)y = 0$.
- **Définition (premier ordre, linéaire avec second membre, résolue) :**
  $$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (E)$$
  avec $(a, b) \in \left(\mathcal{C}^0(I)\right)^2$; on cherche l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions.
- **Propriété (Théorème de superposition) :**
  - Si y_1 est solution sur J de (E_1) : $y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t)$;
  - Si y_2 est solution sur J de (E_2) : $y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t)$;

  alors $y_1 + y_2$ est solution sur J de (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t) + b_2(t)$.
- **Remarque (linéarité de l'équation) :** Si f_1 et f_2 sont des solutions de (H) sur I, alors $\forall(\lambda_1,\, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$ selon les cas), $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de H sur I.
- **Remarque :**
  En particulier, si φ_0 est une solution particulière de l'équation (E) et si (H) est l'équation homogène associée, l'ensemble des solutions de (E) est :
  $$\mathscr{S}_E = \left\{ \varphi_0 + h,\ h \in \mathscr{S}_H \right\}$$
- **Propriété (Méthode de variation de la constante) :**
  Si on connait une solution φ de l'équation homogène (H) associée ne s'annulant pas, on peut obtenir une solution de l'équation générale en considérant une fonction de la forme $x \mapsto \lambda(x)\varphi_0(x)$ où λ est une fonction dérivable.
- **Exemples :** Équations différentielles qui ne sont pas sous forme résolue.
  Explication de la méthode générale ; on est amené à considérer des problèmes de recollements D^1 ; on travaille au cas par cas (**et aucune théorie de la dérivation, des D.L. ou de l'intégration n'a été faite !**)...
- **Propriété (régularité des solutions) :**
  Si $(a,\, b) \in \mathcal{C}^p(I)^2$, les solutions éventuelles de l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^{p+1}(I)$ (démonstration par récurrence finie).
- **Propriété :** Le problème de Cauchy pour une équation sous forme résolue admet une unique solution.

Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes :

- **Définitions :** Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, on note $\mathbf{Re}(f)$ la fonction partie réelle de f définie par $\forall t \in I, \quad \left(\mathbf{Re}(f)\right)(t) = \mathbf{Re}\left(f(t)\right)$ (il s'agit d'une fonction à valeurs réelles).
  On note de même $\mathbf{Im}(f) \ : \ t \mapsto \mathbf{Im}\left(f(t)\right)$ (qui est encore une fonction à valeurs réelles).
  On a donc $f = \mathbf{Re}(f) + i\mathbf{Im}(f)$ (égalité de fonctions).
  On pose de même $\overline{f} = \mathbf{Re}(f) - i\mathbf{Im}(f)$.
- **Définition, notation :** Si $t_0 \in I$ n'est pas une extrémité de I, on dit que f est continue en t_0 lorsque $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.
  $\mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et continues sur I (c'est-à-dire en tout point de I).
- **Propriétés opératoires :**
  $\forall(f_1,\, f_2) \in \left(\mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{C})\right)^2, \quad (f_1 + f_2) \in \mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{C})$.
  $\forall(f_1,\, f_2) \in \left(\mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{C})\right)^2, \quad (f_1 \times f_2) \in \mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{C})$.
  Attention : il n'y a pas de résultat au programme pour la composition de fonctions (ce qui nécessiterait de parler de fonctions à valeurs complexes).
- **Propriétés :**
  $\forall g \in \mathcal{C}^0(J,\, I)$ (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$), $\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{C})$, $f \circ g \in \mathcal{C}^0(J,\, \mathbb{C})$.
- **Définition, notation :** Si $t_0 \in I$ n'est pas une extrémité de I, on dit que f est dérivable en t_0 lorsque $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \ell \in \mathbb{C}$.
  On note $f'(t_0)$ la limite dans ce cas.
  $\mathcal{D}^1(I,\, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dérivables sur I (c'est-à-dire en tout point de I).
- **Propriétés opératoires :**
  $\forall(f_1,\, f_2) \in \left(\mathcal{D}^1(I,\, \mathbb{C})\right)^2, \quad (f_1 + f_2) \in \mathcal{D}^1(I,\, \mathbb{C})$ et $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$.
  $\forall(f_1,\, f_2) \in \left(\mathcal{D}^1(I,\, \mathbb{C})\right)^2, \quad (f_1 \times f_2) \in \mathcal{D}^1(I,\, \mathbb{C})$ et $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$.
  Toujours pas de résultat au programme pour la composition de fonctions.
- **Exercice :**
  Si $\forall f \in \mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{C})$, $\exp \circ f \in \mathcal{C}^0(I,\, \mathbb{C})$.
  Si $\forall f \in \mathcal{D}^1(I,\, \mathbb{C})$, $\exp \circ f \in \mathcal{D}^1(I,\, \mathbb{C})$ et on a $(\exp \circ f)' = (\exp \circ f) \times f'$.

Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

▶ **Définition :** On considère maintenant l'équation :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

avec a, b, c des **constantes**, $a \neq 0$ et d une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
On appelle « *équation caractéristique* », l'équation : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

▶ **Théorème (ordre 2, linéaire, coefficients constants, homogène, complexe) :**
Solutions de l'équation homogène à valeurs complexes :
- Si $\Delta \neq 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\lambda_1 x},\, x \mapsto e^{\lambda_2 x}\right)$, avec λ_1 et λ_2 les racines complexes de l'équation caractéristique.
- Si $\Delta = 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\lambda_0 x},\, x \mapsto xe^{\lambda_0 x}\right)$, avec λ_0 la racine double.

▶ **Théorème (deuxième ordre, linéaire, coefficients constants, réelle) :**
Solutions de l'équation homogène à valeurs réelles (avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$) :
- Si $\Delta > 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\lambda_1 x},\, x \mapsto e^{\lambda_2 x}\right)$, avec λ_1 et λ_2 les racines réelles de l'équation caractéristique.
- Si $\Delta = 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\lambda_0 x},\, x \mapsto xe^{\lambda_0 x}\right)$, avec λ_0 la racine double.
- Si $\Delta < 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x),\, x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que les racines (complexes conjuguées) de l'équation caractéristique soient $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.

▶ **Remarque :** méthode de recherche de solutions particulières lorsque le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)e^{mt}$ avec P une fonction polynomiale (énoncé sans démonstration).

▶ **En exercice :** résolution de l'équation générale avec second membre quelconque (continu).

▶ **Propriété :** Étude du problème de Cauchy.

Chapitre 7 Suites réelles - limites et convergence

Complément sur les réels :

▶ **Définition :** On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{R}$ muni de deux lois de composition interne + et ·, et d'une relation d'ordre $\leqslant$ telles que :
◊ $(\mathbb{R}, +, .)$ a une structure de corps.
◊ $\leqslant$ est une relation d'ordre total ; qui est *compatible* avec les opérations du corps, c'est-à-dire :
- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall z \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant y \implies xz \leqslant yz$

◊ Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, ., \leqslant)$ (c'est le résumé des deux points précédents) vérifie ***la propriété de la borne supérieure*** : « *toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure* ».

▶ **Remarque :** la compatibilité de $\leqslant$ avec les lois du corps permet d'assurer que la propriété correspondante sur les bornes inférieures est également vérifiée.
On en profite pour donner les définitions de « majorant », « minorant », « maximum », « minimum », « borne supérieure » et « borne inférieure » dans le cadre des réels.

Définition d'une limite (suites) :

▶ **Définition (limite finie) :**
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* (ou qu'elle admet une limite finie) s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

▶ **Remarque :** Il y a équivalence entre $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.

▶ **Définition (limite infinie) :**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$) si : $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \geqslant M$.
Même chose pour $-\infty$.

Propriétés (suites) :

▶ **Propriété :** Unicité de la limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

▶ **Propriété :** La limite est une *notion locale* : si deux suites coïncident à partir d'un certain rang, elles sont de même nature, et si elles admettent une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$), c'est la même.

▶ **Théorème de majoration :**
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n| < v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

▶ **Théorème de minoration :**
Si $\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

▶ **« Théorème des gendarmes » (ou théorème d'encadrement) :**
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que :

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

▶ **Propriété (Conservation des inégalités larges par passage à la limite) :**
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$, de limites respectives ℓ et ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$.

▶ **Propriétés opératoires :**
- Une suite convergente est bornée.
- Une suite convergente à valeurs entières est stationnaire.
- Toute suite convergente de limite $\ell > 0$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel $\alpha > 0$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
- Extension aux limites infinies, formes indéterminées.
- Si (u_n) est bornée et si (v_n) est de limite nulle, alors $(u_n v_n)$ est de limite nulle.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$.
- Extension aux limites infinies, formes indéterminées.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie et bornée à partir d'un certain rang.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

▶ **Définition (« suite extraite ») :**
Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, on dit que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▶ **Propriété :** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite ℓ, toutes ses suites extraites tendent vers ℓ.

▶ **Exercice :** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

▶ **Remarque :** Utilisation de la contraposée de la propriété précédente pour prouver la divergence d'une suite.