Semaine 09

lundi 25 nov. 2024
> samedi 30 nov. 2024

Chapitre 5 Nombres complexes

■ Définitions, Structure :

- **Définition :** $\mathbb{C} = \{(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et on munit cet ensemble de deux fonctions de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $+$ et $\times$ définies par : $\forall\left((x, y), (x', y')\right) \in \mathbb{C}^2$, $\quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$;
  $\forall\left((x, y), (x', y')\right) \in \mathbb{C}^2$, $\quad (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.
- **Propriété :** On vérifie les propriétés suivantes, que l'on résume en disant que $(\mathbb{C}, +\times)$ a une *structure de corps* :
  1 • $(\mathbb{C}, +)$ est non vide, muni d'une loi de composition interne associative ;
  2 • La loi $+$ admet un élément neutre : 0 ($\forall z \in \mathbb{C}$, $\quad z + 0 = z$ **et** $0 + z = z$) ;
  3 • Tout élément de $\mathbb{C}$ possède un *symétrique* pour la loi $+$;
  4 • La loi $\times$ est associative sur $\mathbb{C}$;
  5 • La loi $\times$ admet un élément neutre : 1 ;
  6 • Tout élément *non nul* de $\mathbb{C}$ admet un symétrique pour la loi $\times$;
  7 • La loi $+$ est commutative sur $\mathbb{C}$;
  8 • La loi $\times$ est commutative sur $\mathbb{C}$;
  9 • La loi $\times$ est distributive sur la loi $+$.
- **Remarque :** on résume les trois premières propriétés en disant que $(\mathbb{C}, +)$ est *un groupe*...
- **Définition :** partie réelle, partie imaginaire, notations $\mathbf{Re}(z)$ et $\mathbf{Im}(z)$, propriétés élémentaires ($\mathbf{Re}(iz) = -\mathbf{Im}(z)$, $\mathbf{Im}(iz) = \mathbf{Re}(z)$).

■ Module, Argument :

- **Propriété (la conjugaison) :** $\sigma \ :\ z \mapsto \bar{z}$ est une involution de $\mathbb{C}$; formule de conjugaison d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathbf{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$
- **Définition (module) :** $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- **Propriété (module) :** $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |-z| = |\bar{z}| = |z|$; pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- **Inégalité triangulaire :**
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$
  Il y a égalité si et seulement si $z' = 0$ ou $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.
- **Corollaires :**
  - $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
  - $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \quad |z_1 - z_3| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$.
- **Remarque :** représentation graphique des complexes ; définition de l'*affixe d'un point* du plan,si $M(z)$ et $M'(z')$, l'*affixe du vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ est le complexe $z' - z$.
- **Définition :** À partir de la définition géométrique des fonctions cos et sin, construction de la fonction exponentielle $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ \theta \mapsto e^{i\theta}\end{array}\right.$
- **Propriété (...fondamentale de l'exponentielle complexe) :**
$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$$
- **Définition :** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, les arguments de z sont les $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$.
  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, l'argument principal de z est $\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) \cap]-\pi, \pi[$.
- **Définition :** On appelle écriture sous forme trigonométrique (ou *polaire*) d'un complexe z non nul, $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
- **Propriété :** Si $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$ avec $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$.
- **Propriétés (des arguments) :** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(\bar{z})$, $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $\arg(zz')$.
- **Définition (exponentielle complexe) :** $\forall z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = e^{\mathbf{Re}(z)} e^{i\mathbf{Im}(z)}$.
  Propriété fondamentale de l'exponentielle complexe : $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.
- **Propriété (résolution de l'équation) :** $e^z = a$ pour $a \in \mathbb{C}$.
- **Formules trigonométriques :** formules d'Euler, de Moivre, d'addition, de duplication de l'angle.
  L'objectif est de pouvoir retrouver les formules usuelles, pas de les démontrer...

■ Équations complexes :

- **Définition :** Équation $z^2 = z_0$; définition des racines carrées complexes.
- **Propriété (trinôme du second degré) :** $az^2 + bz + c = 0$; existence et expression des solutions ;
- **Définition (racines n-ièmes de l'unité) :**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions distinctes, ce sont les éléments de $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.
- **Corollaire :** si $n \in \mathbb{N}^*$, $z_0 \in \mathbb{C}^*$ dont un argument est θ_0, l'équation $z^n = z_0$ admet exactement n solutions : $\left\{|z_0|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta_0}{n}}\omega, \quad \omega \in \mathbb{U}_n\right\}$.
- **Remarque :** Interprétation graphique de $\mathbb{U}_n$.

Chapitre 6 Équations différentielles linéaires, Calculs de primitives

■ Premières propriétés -- généralités :

- **Définitions :**
  On dit qu'une « *équation fonctionnelle* » de la forme $F\left(t, y(t), \ldots, y^{(k)}(t)\right) = 0$ avec $F \ :\ \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ est une *équation différentielle d'ordre* k.
  On appelle *solution d'une équation différentielle* un couple (I, f) avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point) et f une application de classe $\mathcal{C}^k(I)$ vérifiant l'équation sur I.
  On appelle *solution maximale* une solution qui n'est la restriction d'aucune autre.
- **Définition (problème de Cauchy) :**
  Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle d'ordre p et de p « conditions initiales » de la forme $y(t_0) = \alpha_0$, $y'(t_0) = \alpha_1$, ..., $y^{(p-1)}(t_0) = \alpha_{p-1}$.
- **Propriété (premier ordre linéaire) :**
  On considère les équations de la forme $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \quad (E)$; on dit que
  - (E) est *homogène* si $x \mapsto c(x)$ est la fonction nulle ;
  - (E) est « *sous forme résolue* » si $x \mapsto a(x)$ est la fonction constante à 1.

■ Intégrale et primitive

- **Théorème fondamental (admis) :**
  Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I, $a \in I$ et la fonction $F \ :\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ définie sur I.
  F est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est f.
- **Définition :** *primitive sur un segment.* On dit que $F \ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f \ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ si elle est dérivable et si $F' = f$.
- **Corollaire 1 :** Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I. L'ensemble des primitives d'une fonction f continue sur I est, si $a \in I$: $\left\{x \mapsto \displaystyle\int_a^x f + C, \quad C \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Corollaire 2 :** Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, si $(a, b) \in I^2$, et si h est une primitive (quelconque) de f sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a)$.
- **Formule d'intégration par parties :**
  Soit $(f, g) \in \left(\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})\right)^2$, alors : $\displaystyle\int_a^b f'g = \big[fg\big]_a^b - \int_a^b fg'$.
- **Formule de changement de variable $\mathcal{C}^1$:**
  Soit $\varphi \ :\ [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; on note $[a, b] = \varphi\big([\alpha, \beta]\big)$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$; alors : $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi'$.
- **Application :** Intégrales de fonctions périodiques, paires, impaires...
- **Primitives usuelles**
  Les primitives des fonctions suivantes doivent être connues (***avec leur domaine de définition***) :

$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$
$x \mapsto \cos(x)$		$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$

- **Remarque :**
  à ce niveau, aucune théorie générale n'a été donnée pour les fractions rationnelles ou les fractions en cos, sin.
  En plus des primitives usuelles et des composées de fonctions, les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ et celles de la forme $x \mapsto e^{mx}\cos(kx)$ ou $x \mapsto e^{mx}\sin(kx)$ sont traitées dans le cours.
  Pour les autres intégrales, on donnera une indication sur les changements de variables éventuels.

Équations linéaires d'ordre 1 :

- **Théorème (premier ordre, linéaire, homogène, résolue) :**
On considère $x \mapsto a(x)$ une fonction continue sur I et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :
$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (H)$$
L'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions de la forme $y = \lambda e^{A}$, où A est une primitive de $-a$ et λ une constante réelle ou complexe (selon que l'on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On dispose de la notation intégrale suivante, en fixant $t_0 \in I$:
$$\mathscr{S}_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-\int_{t_0}^{t} a(u)\, du},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
- **Notation :** On *tolère* l'abus de notation suivant pour écrire l'équation (et seulement pour cela) : $y' + a(x)y = 0$.
- **Définition (premier ordre, linéaire avec second membre, résolue) :**
$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (E)$$
avec $(a, b) \in \left(\mathcal{C}^0(I)\right)^2$; on cherche l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions.
- **Propriété (Théorème de superposition) :**
  - Si y_1 est solution sur J de (E_1) : $y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t)$;
  - Si y_2 est solution sur J de (E_2) : $y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t)$;

  alors $y_1 + y_2$ est solution sur J de (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t) + b_2(t)$.
- **Remarque (linéarité de l'équation) :** Si f_1 et f_2 sont des solutions de (H) sur I, alors $\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$ selon les cas), $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de H sur I.
- **Remarque :**
En particulier, si φ_0 est une solution particulière de l'équation (E) et si (H) est l'équation homogène associée, l'ensemble des solutions de (E) est :
$$\mathscr{S}_E = \left\{ \varphi_0 + h,\ h \in \mathscr{S}_H \right\}$$
- **Propriété (Méthode de variation de la constante) :**
Si on connait une solution φ de l'équation homogène (H) associée ne s'annulant pas, on peut obtenir une solution de l'équation générale en considérant une fonction de la forme $x \mapsto \lambda(x)\varphi_0(x)$ où λ est une fonction dérivable.
- **Exemples :** Équations différentielles qui ne sont pas sous forme résolue. Explication de la méthode générale ; on est amené à considérer des problèmes de recollements D^1 ; on travaille au cas par cas (**et aucune théorie de la dérivation, des D.L. ou de l'intégration n'a été faite !**)...
- **Propriété (régularité des solutions) :**
Si $(a, b) \in \mathcal{C}^p(I)^2$, les solutions éventuelles de l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^{p+1}(I)$ (démonstration par récurrence finie).
- **Propriété :** Le problème de Cauchy pour une équation sous forme résolue admet une unique solution.

Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes :

- **Définitions :** Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, on note $\mathbf{Re}(f)$ la fonction partie réelle de f définie par $\forall t \in I,\quad \left(\mathbf{Re}(f)\right)(t) = \mathbf{Re}\left(f(t)\right)$ (il s'agit d'une fonction à valeurs réelles).
On note de même $\mathbf{Im}(f)\ :\ t \mapsto \mathbf{Im}\left(f(t)\right)$ (qui est encore une fonction à valeurs réelles).
On a donc $f = \mathbf{Re}(f) + i\mathbf{Im}(f)$ (égalité de fonctions).
On pose de même $\overline{f} = \mathbf{Re}(f) - i\mathbf{Im}(f)$.
- **Définition, notation :** Si $t_0 \in I$ n'est pas une extrémité de I, on dit que f est continue en t_0 lorsque $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.
$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et continues sur I (c'est-à-dire en tout point de I).
- **Propriétés opératoires :**
$\forall(f_1, f_2) \in \left(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})\right)^2, \quad (f_1 + f_2) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
$\forall(f_1, f_2) \in \left(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})\right)^2, \quad (f_1 \times f_2) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
Attention : il n'y a pas de résultat au programme pour la composition de fonctions (ce qui nécessiterait de parler de fonctions à valeurs complexes).
- **Propriétés :**
$\forall g \in \mathcal{C}^0(J, I)$ (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$), $\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, $f \circ g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{C})$.
- **Définition, notation :** Si $t_0 \in I$ n'est pas une extrémité de I, on dit que f est dérivable en t_0 lorsque $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \ell \in \mathbb{C}$.
On note $f'(t_0)$ la limite dans ce cas.
$\mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dérivables sur I (c'est-à-dire en tout point de I).
- **Propriétés opératoires :**
$\forall(f_1, f_2) \in \left(\mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})\right)^2, \quad (f_1 + f_2) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ et $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$.
$\forall(f_1, f_2) \in \left(\mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})\right)^2, \quad (f_1 \times f_2) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ et $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$.
Toujours pas de résultat au programme pour la composition de fonctions.
- **Exercice :**
Si $\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, $\exp \circ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
Si $\forall f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$, $\exp \circ f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ et on a $(\exp \circ f)' = (\exp \circ f) \times f'$.

Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

- **Définition :** On considère maintenant l'équation :
$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$
avec a, b, c des **constantes**, $a \neq 0$ et d une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
On appelle « *équation caractéristique* », l'équation : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.
- **Théorème (ordre 2, linéaire, coefficients constants, homogène, complexe) :**
Solutions de l'équation homogène à valeurs complexes :
  - Si $\Delta \neq 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\lambda_1 x},\ x \mapsto e^{\lambda_2 x}\right)$, avec λ_1 et λ_2 les racines complexes de l'équation caractéristique.
  - Si $\Delta = 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\lambda_0 x},\ x \mapsto x e^{\lambda_0 x}\right)$, avec λ_0 la racine double.
- **Théorème (deuxième ordre, linéaire, coefficients constants, réelle) :**
Solutions de l'équation homogène à valeurs réelles (avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$) :
  - Si $\Delta > 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\lambda_1 x},\ x \mapsto e^{\lambda_2 x}\right)$, avec λ_1 et λ_2 les racines réelles de l'équation caractéristique.
  - Si $\Delta = 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\lambda_0 x},\ x \mapsto x e^{\lambda_0 x}\right)$, avec λ_0 la racine double.
  - Si $\Delta < 0$, $\mathscr{S}_H$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille libre $\left(x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que les racines (complexes conjuguées) de l'équation caractéristique soient $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.
- **Remarque :** méthode de recherche de solutions particulières lorsque le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)e^{mt}$ avec P une fonction polynomiale (énoncé sans démonstration).
- **En exercice :** résolution de l'équation générale avec second membre quelconque (continu).
- **Propriété :** Étude du problème de Cauchy.