Semaine 07

lundi 10 nov. 2025
> samedi 15 nov. 2025

Chapitre 3 Rappels sur les réels

■ Quelques théorèmes admis temporairement :

- **Propriété :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction strictement monotone et **continue** sur I.

  1 • Alors $f(I)$ est un intervalle,
  2 • f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
  3 • De plus la bijection réciproque f^{-1} est également strictement monotone (de même stricte monotonie que f)
  4 • Et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.

- **Propriété :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction strictement monotone et **dérivable** sur I.

  5 • Pour tout $x \in I$, f^{-1} est dérivable en $f(x)$ si et seulement si $f'(x) \neq 0$;
  6 • Si $x \in I$, lorsque $f'(x) \neq 0$, on a $(f^{-1})'\Big(f(x)\Big) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
  7 • On peut énoncer le point précédent différemment : si $y \in f(I)$, lorsque $f'\Big(f^{-1}(y)\Big)x) \neq 0$, on a : $(f^{-1})'\Big(y\Big) = \dfrac{1}{f'\Big(f^{-1}(y)\Big)}$.

- **Théorème (Existence d'une primitive pour une fonction continue) :**
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \quad \exists F \in \mathcal{C}^1(I), \quad F' = f$$
- **Propriété :** Deux fonctions dérivables de même dérivée **sur un intervalle** diffèrent d'une constante sur cet intervalle.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, on dispose donc d'une expression « sous forme intégrale » de **la** primitive d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$ qui s'annule en $x_0 \in I$: $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.
- **Propriété :** Formule de changement de variable dans les intégrales (sans démonstration) dans le cas d'une fonction bijective $\mathcal{C}^1$. *Essentiellement utilisée sur des exemples de changements de variable affines.*
- **Propriété :** On admet enfin la propriété suivante pour les fonctions f croissantes sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$:
  - si f est majorée, sa limite en $+\infty$ existe et est finie ;
  - si f n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

Chapitre 4 Fonctions usuelles

■ Logarithmes, Exponentielles et Puissances :

- **Définition :** La fonction *logarithme népérien*, notée ln est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
- **Propriétés élémentaires :** ln est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; on a :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x^n) = n \ln x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$$
- **Corollaire :** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$
- **Définition :** On note e (nombre de Néper) l'antécédent de 1 par ln.
- **Définition :** La fonction exponentielle, définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, est la bijection réciproque de ln.
- **Propriétés élémentaires :** exp est une fonction bijective, strictement croissante, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$
$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$
$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \qquad \exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geqslant x + 1$$
Les trois premières égalités justifient l'usage de la notation $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
La dérivée de exp sur $\mathbb{R}$ est exp.
- **Corollaire :** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$
- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on note $\log_a$: $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}\right.$ le logarithme de base a et $\exp_a$: $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \exp(x \ln(a)) \end{array}\right.$ l'exponentielle de base a.
Propriétés élémentaires.
- **Définition :** On appelle fonction puissance d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction
$$p_\alpha : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)) \end{array}\right.$$
- **Lemme :** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$
- **Propriété (croissances comparées du logarithme et des puissances) :**
$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0$$
- **Remarque :** La situation $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$ peut s'étudier directement (il n'y a pas d'indétermination ; idem pour $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$. Le cas $a < 0$ et $b < 0$ s'obtient en passant à l'inverse dans le cas précédent.
- **Propriété (croissances comparées de l'exponentielle et des puissances) :**
$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\mathrm{e}^x)^a}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^b (\mathrm{e}^x)^a = 0$$

■ Fonctions circulaires et circulaires réciproques :

- **Définition :** Les fonctions circulaires sont construites de façon géométrique (on suppose connues les notions de géométrie plane) ; des idées de démonstrations (géométriques) des différentes propriétés ont été données...
- **Formules trigonométriques usuelles**
- **Définition (fonctions circulaires réciproques) :** Arccos, Arcsin et Arctan, continuité, dérivabilité, expression des dérivées :
$$\forall x \in \,]-1, 1[, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = -\mathrm{Arccos}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

■ Les limites suivantes sont à connaître (sans démonstration)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \,; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \,; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \,; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \,; \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0 \,; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \,; \quad \lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \,; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

Chapitre 5 Nombres complexes

■ Définitions, Structure :

- **Définition :**
$\mathbb{C} = \{(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et on munit cet ensemble de deux fonctions de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $+$ et $\times$ définies par : $\forall\, \big((x, y), (x', y')\big) \in \mathbb{C}^2, \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$;
$\forall\, \big((x, y), (x', y')\big) \in \mathbb{C}^2, \quad (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.
- **Propriété :** On vérifie les propriétés suivantes, que l'on résume en disant que $(\mathbb{C}, +\times)$ a une *structure de corps* :
  1 • $(\mathbb{C}, +)$ est non vide, muni d'une loi de composition interne associative ;
  2 • La loi $+$ admet un élément neutre : 0 ($\forall z \in \mathbb{C}, \quad z + 0 = z$ **et** $0 + z = z$) ;
  3 • Tout élément de $\mathbb{C}$ possède un *symétrique* pour la loi $+$;
  4 • La loi $\times$ est associative sur $\mathbb{C}$;
  5 • La loi $\times$ admet un élément neutre : 1 ;
  6 • Tout élément *non nul* de $\mathbb{C}$ admet un symétrique pour la loi $\times$;
  7 • La loi $+$ est commutative sur $\mathbb{C}$;
  8 • La loi $\times$ est commutative sur $\mathbb{C}$;
  9 • La loi $\times$ est distributive sur la loi $+$.
- **Remarque :** on résume les trois premières propriétés en disant que $(\mathbb{C}, +)$ est *un groupe*...
- **Définition :** partie réelle, partie imaginaire, notations $\mathbf{Re}(z)$ et $\mathbf{Im}(z)$, propriétés élémentaires ($\mathbf{Re}(iz) = -\mathbf{Im}(z)$, $\mathbf{Im}(iz) = \mathbf{Re}(z)$).

■ Module, Argument :

- **Propriété (la conjugaison) :** $\sigma\ :\ z \mapsto \bar{z}$ est une involution de $\mathbb{C}$; formule de conjugaison d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathbf{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$
- **Définition (module) :** $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- **Propriété (module) :** $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |-z| = |\bar{z}| = |z|$; pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.
-

Inégalité triangulaire :
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$
Il y a égalité si et seulement si $z' = 0$ ou $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.

- **Corollaires :**
  - $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
  - $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \quad |z_1 - z_3| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$.
- **Remarque :** représentation graphique des complexes ; définition de l'*affixe d'un point* du plan,si $M(z)$ et $M'(z')$, l'*affixe du vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ est le

complexe $z' - z$.

- **Définition :** À partir de la définition géométrique des fonctions cos et sin, construction de la fonction exponentielle $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ \theta \mapsto e^{i\theta}\end{array}\right.$
- **Propriété (...fondamentale de l'exponentielle complexe) :**
$$\forall(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$
- **Définition :** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, les arguments de z sont les $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$.
$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, l'argument principal de z est $\operatorname{Arg}(z) = \arg(z) \cap] - \pi, \pi[$.
- **Définition :** On appelle écriture sous forme trigonométrique (ou *polaire*) d'un complexe z non nul, $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
- **Propriété :** Si $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$ avec $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$.
- **Propriétés (des arguments) :** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(\bar{z})$, $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $\arg(zz')$.
- **Définition (exponentielle complexe) :** $\forall z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)}$.
Propriété fondamentale de l'exponentielle complexe : $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
- **Propriété (résolution de l'équation) :** $e^z = a$ pour $a \in \mathbb{C}$.
- **Formules trigonométriques :** formules d'Euler, de Moivre, d'addition, de duplication de l'angle.
L'objectif est de pouvoir retrouver les formules usuelles, pas de les démontrer...

Équations complexes :

- **Définition :** Équation $z^2 = z_0$; définition des racines carrées complexes.
- **Propriété (trinôme du second degré) :** $az^2 + bz + c = 0$; existence et expression des solutions ;
- **Définition (racines n-ièmes de l'unité) :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions distinctes, ce sont les éléments de $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.
- **Corollaire :** si $n \in \mathbb{N}^*$, $z_0 \in \mathbb{C}^*$ dont un argument est θ_0, l'équation $z^n = z_0$ admet exactement n solutions : $\left\{|z_0|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta_0}{n}}\omega, \quad \omega \in \mathbb{U}_n\right\}$.
- **Remarque :** Interprétation graphique de $\mathbb{U}_n$.

Chapitre 6 Équations différentielles linéaires, Calculs de primitives

Premières propriétés -- généralités :

- **Définitions :**
On dit qu'une « *équation fonctionnelle* » de la forme $F\left(t, y(t), \ldots, y^{(k)}(t)\right) = 0$ avec $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ est une *équation différentielle d'ordre* k.
On appelle *solution d'une équation différentielle* un couple (I, f) avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point) et f une application de classe $\mathcal{C}^k(I)$ vérifiant l'équation sur I.
On appelle *solution maximale* une solution qui n'est la restriction d'aucune autre.
- **Définition (problème de Cauchy) :**
Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle d'ordre p et de p « conditions initiales » de la forme $y(t_0) = \alpha_0$, $y'(t_0) = \alpha_1$, ..., $y^{(p-1)}(t_0) = \alpha_{p-1}$.
- **Propriété (premier ordre linéaire) :**
On considère les équations de la forme $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \quad (E)$; on dit que
  - (E) est *homogène* si $x \mapsto c(x)$ est la fonction nulle ;
  - (E) est « *sous forme résolue* » si $x \mapsto a(x)$ est la fonction constante à 1.

Intégrale et primitive

- **Théorème fondamental (admis) :**
Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I, $a \in I$ et la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ définie sur I.
F est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est f.
- **Définition :** *primitive sur un segment.* On dit que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si elle est dérivable et si $F' = f$.
- **Corollaire 1 :** Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I. L'ensemble des primitives d'une fonction f continue sur I est, si $a \in I$: $\left\{x \mapsto \displaystyle\int_a^x f + C, \quad C \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Corollaire 2 :** Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, si $(a, b) \in I^2$, et si h est une primitive (quelconque) de f sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = h(b) - h(a)$.
- **Formule d'intégration par parties :**
Soit $(f, g) \in \left(\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})\right)^2$, alors : $\displaystyle\int_a^b f'g = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b fg'$.
- **Formule de changement de variable $\mathcal{C}^1$:**
Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; on note $[a, b] = \varphi([\alpha, \beta])$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$; alors : $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi'$.
- **Application :** Intégrales de fonctions périodiques, paires, impaires...
- **Primitives usuelles**
Les primitives des fonctions suivantes doivent être connues (***avec leur domaine de définition***) :

$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$
$x \mapsto \cos(x)$		$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$

- **Remarque :**
à ce niveau, aucune théorie générale n'a été donnée pour les fractions rationnelles ou les fractions en cos, sin.
En plus des primitives usuelles et des composées de fonctions, les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ et celles de la forme $x \mapsto e^{mx}\cos(kx)$ ou $x \mapsto e^{mx}\sin(kx)$ sont traitées dans le cours.
Pour les autres intégrales, on donnera une indication sur les changements de variables éventuels.

Équations linéaires d'ordre 1 :

- **Théorème (premier ordre, linéaire, homogène, résolue) :**
On considère $x \mapsto a(x)$ une fonction continue sur I et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :
$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (H)$$
L'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions de la forme $y = \lambda e^A$, où A est une primitive de $-a$ et λ une constante réelle ou complexe (selon que l'on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On dispose de la notation intégrale suivante, en fixant $t_0 \in I$:
$$\mathscr{S}_H = \left\{t \mapsto \lambda e^{-\int_{t_0}^t a(u)\,du}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$
- **Notation :** On *tolère* l'abus de notation suivant pour écrire l'équation (et seulement pour cela) : $y' + a(x)y = 0$.
- **Définition (premier ordre, linéaire avec second membre, résolue) :**
$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (E)$$
avec $(a, b) \in \left(\mathcal{C}^0(I)\right)^2$; on cherche l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions.
- **Propriété (Théorème de superposition) :**
  - Si y_1 est solution sur J de (E_1) : $y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t)$;
  - Si y_2 est solution sur J de (E_2) : $y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t)$;

  alors $y_1 + y_2$ est solution sur J de (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t) + b_2(t)$.
- **Remarque (linéarité de l'équation) :** Si f_1 et f_2 sont des solutions de (H) sur I, alors $\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$ selon les cas), $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de H sur I.
- **Remarque :**
En particulier, si φ_0 est une solution particulière de l'équation (E) et si (H) est l'équation homogène associée, l'ensemble des solutions de (E) est :
$$\mathscr{S}_E = \left\{\varphi_0 + h, \ h \in \mathscr{S}_H\right\}$$
- **Propriété (Méthode de variation de la constante) :**
Si on connait une solution φ de l'équation homogène (H) associée ne s'annulant pas, on peut obtenir une solution de l'équation générale en considérant une fonction de la forme $x \mapsto \lambda(x)\varphi_0(x)$ où λ est une fonction dérivable.