Semaine 06

lundi 4 nov. 2024
> samedi 9 nov. 2024

Chapitre 3 Rappels sur les réels

■ Les réels :

■ Quelques théorèmes admis temporairement :

▶ **Définitions :**
Écriture des propriétés suivantes avec des quantificateurs : fonction paire, impaire, majorée, minorée, bornée, périodique, croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.

▶ **Définitions (voisinages) :**

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* x_0 lorsque :
  $\exists \alpha > 0, \quad]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset V$.
- On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* $+\infty$ lorsque : $\exists A \in \mathbb{R}, \quad]A, +\infty[\subset V$.
- On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* $-\infty$ lorsque : $\exists B \in \mathbb{R}, \quad]-\infty, B[\subset V$.
- Pour un $x_0 \in \mathbb{R} \cup \left\{-\infty, +\infty\right\}$, on note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.
  On utilise parfois la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R} \cup \left\{-\infty, +\infty\right\}$.

▶ **Propriété :** Propriétés opératoires de continuité et de dérivation (en particulier pour les composées).
Une utilisation erronée (« la composée de deux fonctions dérivables en x_0... ») doit être sanctionnée !

▶ **Notations :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, on note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I, $\mathcal{D}^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I, puis on définit par récurrence les ensembles suivants :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{D}^{k+1}(I) = \left\{ f \in \mathcal{D}^1(I) \ \middle/ \ f' \in \mathcal{D}^k(I) \right\}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{C}^{k+1}(I) = \left\{ f \in \mathcal{D}^1(I) \ \middle/ \ f' \in \mathcal{C}^k(I) \right\}$.

On note également $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I)$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^{k+1}(I) \subset \mathcal{D}^{k+1}(I) \subset \mathcal{C}^k(I)$.

▶ **Propriété :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction strictement monotone et **continue** sur I.

1 • Alors $f(I)$ est un intervalle,
2 • f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
3 • De plus la bijection réciproque f^{-1} est également strictement monotone (de même stricte monotone que f)
4 • Et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.

▶ **Propriété :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction strictement monotone et **dérivable** sur I.

5 • Pour tout $x \in I$, f^{-1} est dérivable en $f(x)$ si et seulement si $f'(x) \neq 0$;
6 • Si $x \in I$, lorsque $f'(x) \neq 0$, on a $(f^{-1})'\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
7 • On peut énoncer le point précédent différemment : si $y \in f(I)$, lorsque $f'\Big(f^{-1}(y)\Big)x) \neq 0$, on a : $(f^{-1})'\big(y\big) = \dfrac{1}{f'\Big(f^{-1}(y)\Big)}$.

▶ **Théorème (Existence d'une primitive pour une fonction continue) :**

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \quad \exists F \in \mathcal{C}^1(I), \quad F' = f$$

▶ **Propriété :** Deux fonctions dérivables de même dérivée **sur un intervalle** diffèrent d'une constante sur cet intervalle.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, on dispose donc d'une expression « sous forme intégrale » de **la** primitive d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$ qui s'annule en $x_0 \in I$: $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

▶ **Propriété :** Formule de changement de variable dans les intégrales (sans démonstration) dans le cas d'une fonction bijective $\mathcal{C}^1$. *Essentiellement utilisée sur des exemples avec des changements de variable affines.*

▶ **Propriété :** On admet enfin la propriété suivante pour les fonctions f croissantes sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$:

- si f est majorée, sa limite en $+\infty$ existe et est finie ;
- si f n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

Chapitre 4 Fonctions usuelles

■ Logarithmes, Exponentielles et Puissances :

▶ **Définition :** La fonction *logarithme népérien*, notée ln est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

▶ **Propriétés élémentaires :** ln est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; on a :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x^n) = n \ln x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$$

▶ **Corollaire :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

▶ **Définition :** On note e (nombre de Néper) l'antécédent de 1 par ln.

▶ **Définition :** La fonction exponentielle, définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, est la bijection réciproque de ln.

▶ **Propriétés élémentaires :** exp est une fonction bijective, strictement croissante, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$
$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$
$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \qquad \exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geqslant x + 1$$

Les trois premières égalités justifient l'usage de la notation $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
La dérivée de exp sur $\mathbb{R}$ est exp.

▶ **Corollaire :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

▶ **Définition :** Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on note $\log_a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array} \right.$ le logarithme de base a et $\exp_a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \exp\big(x \ln(a)\big) \end{array} \right.$ l'exponentielle de base a.
Propriétés élémentaires.

▶ **Définition :** On appelle fonction puissance d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction

$$p_\alpha : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = \exp\big(\alpha \ln(x)\big) \end{array} \right.$$

▶ **Lemme :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty.$

▶ **Propriété (croissances comparées du logarithme et des puissances) :**

$$\forall(a,\,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^b}{x^a}=0,\quad \lim_{x\to0^+}x^a|\ln(x)|^b=0$$

▶ **Remarque :** La situation $a\leqslant 0$ et $b\geqslant 0$ peut s'étudier directement (il n'y a pas d'indétermination ; idem pour $a\geqslant 0$ et $b\leqslant 0$. Le cas $a<0$ et $b<0$ s'obtient en passant à l'inverse dans le cas précédent.

▶ **Propriété (croissances comparées de l'exponentielle et des puissances) :**

$$\forall(a,\,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)^a}{x^b}=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}|x|^b(e^x)^a=0$$

■ Fonctions circulaires et circulaires réciproques :

▶ **Définition :** Les fonctions circulaires sont construites de façon géométrique (on suppose connues les notions de géométrie plane) ; des idées de démonstrations (géométriques) des différentes propriétés ont été données…

▶ **Formules trigonométriques usuelles**

▶ **Définition (fonctions circulaires réciproques) :** Arccos, Arcsin et Arctan, continuité, dérivabilité, expression des dérivées :

$$\forall x\in\,]-1,\,1[,\quad \text{Arcsin}'(x)=-\text{Arccos}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \text{Arctan}'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

■ Les limites suivantes sont à connaître (sans démonstration)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1\,;\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\,;\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\,;\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1\,;\ \lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0\,;\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty.$

Chapitre 5 Nombres complexes

■ Définitions, Structure :

▶ **Définition :**
$\mathbb{C}=\{(a,b),\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ et on munit cet ensemble de deux fonctions de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $+$ et $\times$ définies par : $\forall\,((x,\,y),\,(x',\,y'))\in\mathbb{C}^2,\quad (x,\,y)+(x',\,y')=(x+x',\,y+y')$;
$\forall\,((x,\,y),\,(x',\,y'))\in\mathbb{C}^2,\quad (x,\,y)\times(x',\,y')=(xx'-yy',\,xy'+x'y)$.

▶ **Propriété :** On vérifie les propriétés suivantes, que l'on résume en disant que $(\mathbb{C},+\times)$ a une *structure de corps* :

1 • $(\mathbb{C},+)$ est non vide, muni d'une loi de composition interne associative ;

2 • La loi $+$ admet un élément neutre : 0 ($\forall z\in\mathbb{C},\quad z+0=z$ et $0+z=z$) ;

3 • Tout élément de $\mathbb{C}$ possède un *symétrique* pour la loi $+$;

4 • La loi $\times$ est associative sur $\mathbb{C}$;

5 • La loi $\times$ admet un élément neutre : 1 ;

6 • Tout élément *non nul* de $\mathbb{C}$ admet un symétrique pour la loi $\times$;

7 • La loi $+$ est commutative sur $\mathbb{C}$;

8 • La loi $\times$ est commutative sur $\mathbb{C}$;

9 • La loi $\times$ est distributive sur la loi $+$.

▶ **Remarque :** on résume les trois premières propriétés en disant que $(\mathbb{C},+)$ est *un groupe…*

▶ **Définition :** partie réelle, partie imaginaire, notations $\mathbf{Re}(z)$ et $\mathbf{Im}(z)$, propriétés élémentaires ($\mathbf{Re}(iz)=-\mathbf{Im}(z)$, $\mathbf{Im}(iz)=\mathbf{Re}(z)$).

■ Module, Argument :

▶ **Propriété (la conjugaison) :** $\sigma\ :\ z\mapsto\bar z$ est une involution de $\mathbb{C}$; formule de conjugaison d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \mathbf{Re}(z)=\frac{1}{2}\,(z+\bar z)\,,\quad \mathbf{Im}(z)=\frac{1}{2i}\,(z-\bar z)$$

▶ **Définition (module) :** $\forall z\in\mathbb{C},\quad |z|=\sqrt{z\bar z}$.

▶ **Propriété (module) :** $\forall z\in\mathbb{C},\quad |-z|=|\bar z|=|z|$; pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar z}{|z|^2}$.

▶ **Inégalité triangulaire :**

$$\forall(z,\,z')\in\mathbb{C}^2,\quad |z+z'|\leqslant|z|+|z'|$$

Il y a égalité si et seulement si $z'=0$ ou $\dfrac{z}{z'}\in\mathbb{R}_+$.

▶ **Corollaires :**
- $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad \big||z|-|z'|\big|\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$.
- $\forall(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3,\quad |z_1-z_3|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2-z_3|$.

▶ **Remarque :** représentation graphique des complexes ; définition de l'*affixe d'un point* du plan,si $M(z)$ et $M'(z')$, l'*affixe du vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ est le complexe $z'-z$.

▶ **Définition :** À partir de la définition géométrique des fonctions cos et sin, construction de la fonction exponentielle $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{U}\\ \theta\mapsto e^{i\theta}\end{array}\right.$

▶ **Propriété (…fondamentale de l'exponentielle complexe) :**

$$\forall(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

▶ **Définition :** $\forall z\in\mathbb{C}^*$, les arguments de z sont les $\theta\in\mathbb{R}$ tels que $e^{i\theta}=\dfrac{z}{|z|}$.
$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, l'argument principal de z est $\text{Arg}(z)=\arg(z)\cap]-\pi,\,\pi[$.

▶ **Définition :** On appelle écriture sous forme trigonométrique (ou *polaire*) d'un complexe z non nul, $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

▶ **Propriété :** Si $r_1e^{i\theta_1}=r_2e^{i\theta_2}$ avec $r_1>0$, $r_2>0$ et $(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2$, on a $r_1=r_2$ et $\theta_1\equiv\theta_2\,[2\pi]$.

▶ **Propriétés (des arguments) :** $\forall z\in\mathbb{C}^*$, $\arg(\bar z)$, $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $\arg(zz')$.

▶ **Définition (exponentielle complexe) :** $\forall z\in\mathbb{C}$, on pose $e^z=e^{\mathbf{Re}(z)}e^{i\mathbf{Im}(z)}$.
Propriété fondamentale de l'exponentielle complexe : $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$.

▶ **Propriété (résolution de l'équation) :** $e^z=a$ pour $a\in\mathbb{C}$.

▶ **Formules trigonométriques :** formules d'Euler, de Moivre, d'addition, de duplication de l'angle.
L'objectif est de pouvoir retrouver les formules usuelles, pas de les démontrer…

■ Équations complexes :

▶ **Définition :** Équation $z^2=z_0$; définition des racines carrées complexes.

▶ **Propriété (trinôme du second degré) :** $az^2+bz+c=0$; existence et expression des solutions ;

▶ **Définition (racines n-ièmes de l'unité) :**
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $z^n=1$ admet exactement n solutions distinctes, ce sont les éléments de $\mathbb{U}_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\quad k\in[\![0,\,n-1]\!]\right\}$.

▶ **Corollaire :** si $n\in\mathbb{N}^*$, $z_0\in\mathbb{C}^*$ dont un argument est θ_0, l'équation $z^n=z_0$ admet exactement n solutions : $\left\{|z_0|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\theta_0}{n}}\omega,\quad \omega\in\mathbb{U}_n\right\}$.

▶ **Remarque :** Interprétation graphique de $\mathbb{U}_n$.