Chapitre 2 Techniques de calcul

Coefficients binomiaux :

- **Définition (factorielle) :**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $n!$ (« factorielle de n » ou « n factorielle ») l'entier défini par récurrence par $0! = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$.
  Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \prod_{k=1}^{n} k$.
- **Définition :**
  Pour tout $(k,\, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ (« k parmi n ») la quantité définie par :
  Si $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; Sinon, $\binom{n}{k} = 0$.
-

Propriété (relation de Pascal) :
On a $\forall (k,\, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
On en déduit en particulier que $\forall (k,\, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

- **Interprétation (triangle de Pascal) :**
  La relation de Pascal permet de construire les coefficients binomiaux rapidement.
-

Propriété (formule du binôme) :
$\forall (a,\, b) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Chapitre 3 Rappels sur les réels

Les réels :

- **Propriété (ensemble des réels) :**
  L'ensemble des réels est muni de deux *lois de composition internes* (c'est-à-dire : fonctions de $E \times E \to E$) : l'addition, notée $+$ et le produit, noté $\times$.
  Ces opérations vérifient les propriétés suivantes :
  - Associativité de $+$: $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$.
  - Existence d'un élément neutre pour la loi $+$, noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+0 = 0+x = x$.
  - Tout réel x admet un *symétrique pour la loi* $+$, c'est-à-dire un réel x' tel que : $x + x' = x' + x = 0$.
    On note cet élément $-x$ et plutôt que d'écrire $y + (-x)$, on note directement $y - x$.
  - Commutativité de $+$: $\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+y = y+x$.
  - Associativité de $\times$: $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
  - Existence d'un élément neutre pour la loi $\times$, noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.
  - Commutativité de $\times$: $\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \times y = y \times x$.
  - Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (à gauche et à droite) : $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (x+y) \times z &= (x \times z) + (y \times z) \\ z \times (x+y) &= (z \times x) + (z \times y) \end{cases}$.
  - Tout réel *non nul* x admet un *symétrique pour la loi* $+$, c'est-à-dire un réel x'' tel que : $x \times x'' = x'' \times x = 1$.
    On note cet élément $\dfrac{1}{x}$ et plutôt que d'écrire $y \times \dfrac{1}{x}$ ou $y \times \dfrac{1}{x}$, on note directement $\dfrac{y}{x}$

  De plus, $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ *qui est compatible avec l'addition et la multiplication* :
  - $\forall (a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbb{R}^4, \quad \big[(a \leqslant b) \quad \text{et} \quad (c \leqslant d)\big] \implies (a+c) \leqslant (b+d)$.
  - $\forall (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \big[(a \leqslant b) \quad \text{et} \quad (c \geqslant 0)\big] \implies a \times c \leqslant b \times c$.
- **Définition (intervalles) :**
  Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties suivantes : $\varnothing$, $\mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\big]a,\, +\infty\big[$, $\big[a,\, +\infty\big[$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\big]-\infty,\, b\big]$, $\big]-\infty,\, b\big[$, $\forall (a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leqslant b$, $\big[a,\, b\big]$, $\big[a,\, b\big[$, $\big]a,\, b\big]$, $\big]a,\, b\big[$.
  Dans la liste précédente, on indique les intervalles ouverts, fermés, bornés (en donnant les définitions de ces notions).
- **Définition (valeur absolue) :**
  Pour tout x réel, on définit la valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel : $\begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- **Propriété (inégalités triangulaires) :**
  $\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Quelques théorèmes admis temporairement :

- **Définitions :**
  Écriture des propriétés suivantes avec des quantificateurs : fonction paire, impaire, majorée, minorée, bornée, périodique, croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.
- **Définitions (voisinages) :**
  - Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* x_0 lorsque :
    $\exists \alpha > 0, \quad]x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha[\subset V$.
  - On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* $+\infty$ lorsque : $\exists A \in \mathbb{R}, \quad]A,\, +\infty[\subset V$.
  - On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* $-\infty$ lorsque : $\exists B \in \mathbb{R}, \quad]-\infty,\, B[\subset V$.
  - Pour un $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\}$, on note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.
    On utilise parfois la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty,\, +\infty\}$.
- **Propriété :** Propriétés opératoires de continuité et de dérivation (en particulier pour les composées).
  Une utilisation erronée (« la composée de deux fonctions dérivables en x_0... ») doit être sanctionnée !
- **Notations :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, on note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I, $\mathcal{D}^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I, puis on définit par récurrence les ensembles suivants :
  - $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{D}^{k+1}(I) = \big\{ f \in \mathcal{D}^1(I) \quad / \quad f' \in \mathcal{D}^k(I) \big\}$.
  - $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{C}^{k+1}(I) = \big\{ f \in \mathcal{D}^1(I) \quad / \quad f' \in \mathcal{C}^k(I) \big\}$.

  On note également $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I)$.
  On a pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^{k+1}(I) \subset \mathcal{D}^{k+1}(I) \subset \mathcal{C}^k(I)$.
- **Propriété :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
  Soit f une fonction strictement monotone et **continue** sur I.
  1 • Alors $f(I)$ est un intervalle,
  2 • f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
  3 • De plus la bijection réciproque f^{-1} est également strictement monotone (de même stricte monotonie que f)
  4 • Et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.
- **Propriété :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
  Soit f une fonction strictement monotone et **dérivable** sur I.
  5 • Pour tout $x \in I$, f^{-1} est dérivable en $f(x)$ si et seulement si $f'(x) \neq 0$;
  6 • Si $x \in I$, lorsque $f'(x) \neq 0$, on a $(f^{-1})'\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
  7 • On peut énoncer le point précédent différemment : si $y \in f(I)$, lorsque $f'\big(f^{-1}(y)\big)x) \neq 0$, on a : $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$.
- **Théorème (Existence d'une primitive pour une fonction continue) :**
  $$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \quad \exists F \in \mathcal{C}^1(I), \quad F' = f$$
- **Propriété :** Deux fonctions dérivables de même dérivée **sur un intervalle** diffèrent d'une constante sur cet intervalle.
  Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, on dispose donc d'une expression « sous forme intégrale » de **la** primitive d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$ qui s'annule en $x_0 \in I$: $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.
- **Propriété :** Formule de changement de variable dans les intégrales (sans démonstration) dans le cas d'une fonction bijective $\mathcal{C}^1$. *Essentiellement utilisée sur des exemples avec des changements de variable affines.*
- **Propriété :** On admet enfin la propriété suivante pour les fonctions f croissantes sur un intervalle de la forme $]a,\, +\infty[$:
  - si f est majorée, sa limite en $+\infty$ existe et est finie ;
  - si f n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

Chapitre 4 Fonctions usuelles

Logarithmes, Exponentielles et Puissances :

- **Définition :** La fonction *logarithme népérien*, notée ln est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
- **Propriétés élémentaires :** ln est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; on a :

$$\forall (x,\, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x^n) = n \ln x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$$

- **Corollaire :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$.
- **Définition :** On note e (nombre de Néper) l'antécédent de 1 par ln.
- **Définition :** La fonction exponentielle, définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, est la bijection réciproque de ln.
- **Propriétés élémentaires :** exp est une fonction bijective, strictement croissante, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x,\, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$
$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$
$$\forall (n,\, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \qquad \exp(nx) = \left(\exp(x)\right)^n$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geqslant x + 1$$

Les trois premières égalités justifient l'usage de la notation $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
La dérivée de exp sur $\mathbb{R}$ est exp.
- **Corollaire :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.
- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on note $\log_a : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{vmatrix}$ le logarithme de base a et $\exp_a : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \exp\left(x \ln(a)\right) \end{vmatrix}$ l'exponentielle de base a.
Propriétés élémentaires.
- **Définition :** On appelle fonction puissance d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction

$$p_\alpha : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = \exp\left(\alpha \ln(x)\right) \end{vmatrix}$$

- **Lemme :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
- **Propriété (croissances comparées du logarithme et des puissances) :**

$$\forall (a,\, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\ln(x)\right)^b}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0$$

- **Remarque :** La situation $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$ peut s'étudier directement (il n'y a pas d'indétermination ; idem pour $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$. Le cas $a < 0$ et $b < 0$ s'obtient en passant à l'inverse dans le cas précédent.
- **Propriété (croissances comparées de l'exponentielle et des puissances) :**

$$\forall (a,\, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)^a}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^b \left(\mathrm{e}^x\right)^a = 0$$

Fonctions circulaires et circulaires réciproques :

- **Définition :** Les fonctions circulaires sont construites de façon géométrique (on suppose connues les notions de géométrie plane) ; des idées de démonstrations (géométriques) des différentes propriétés ont été données...
- **Formules trigonométriques usuelles**
- **Définition (fonctions circulaires réciproques) :** Arccos, Arcsin et Arctan, continuité, dérivabilité, expression des dérivées :

$$\forall x \in \left]-1,\, 1\right[, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = -\mathrm{Arccos}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Les limites suivantes sont à connaître (sans démonstration)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Chapitre 5 Nombres complexes

Définitions, Structure :

- **Définition :**
$\mathbb{C} = \{(a,b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et on munit cet ensemble de deux fonctions de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $+$ et $\times$ définies par : $\forall \left((x,\, y),\, (x',\, y')\right) \in \mathbb{C}^2$, $\quad (x,\, y) + (x',\, y') = (x + x',\, y + y')$;
$\forall \left((x,\, y),\, (x',\, y')\right) \in \mathbb{C}^2, \quad (x,\, y) \times (x',\, y') = (xx' - yy',\, xy' + x'y)$.
- **Propriété :** On vérifie les propriétés suivantes, que l'on résume en disant que $(\mathbb{C}, + \times)$ a une *structure de corps* :
  1. $(\mathbb{C}, +)$ est non vide, muni d'une loi de composition interne associative ;
  2. La loi $+$ admet un élément neutre : 0 ($\forall z \in \mathbb{C}, \quad z + 0 = z$ et $0 + z = z$) ;
  3. Tout élément de $\mathbb{C}$ possède un *symétrique* pour la loi $+$;
  4. La loi $\times$ est associative sur $\mathbb{C}$;
  5. La loi $\times$ admet un élément neutre : 1 ;
  6. Tout élément *non nul* de $\mathbb{C}$ admet un symétrique pour la loi $\times$;
  7. La loi $+$ est commutative sur $\mathbb{C}$;
  8. La loi $\times$ est commutative sur $\mathbb{C}$;
  9. La loi $\times$ est distributive sur la loi $+$.
- **Remarque :** on résume les trois premières propriétés en disant que $(\mathbb{C},\, +)$ est *un groupe...*
- **Définition :** partie réelle, partie imaginaire, notations $\mathbf{Re}(z)$ et $\mathbf{Im}(z)$, propriétés élémentaires ($\mathbf{Re}(iz) = -\mathbf{Im}(z)$, $\mathbf{Im}(iz) = \mathbf{Re}(z)$).

Module, Argument :

- **Propriété (la conjugaison) :** $\sigma \ : \ z \mapsto \bar{z}$ est une involution de $\mathbb{C}$; formule de conjugaison d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \bar{z}\right), \quad \mathbf{Im}(z) = \frac{1}{2i}\left(z - \bar{z}\right)$$

- **Définition (module) :** $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- **Propriété (module) :** $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |-z| = |\bar{z}| = |z|$; pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- **Inégalité triangulaire :**

$$\forall (z,\, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Il y a égalité si et seulement si $z' = 0$ ou $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.
- **Corollaires :**
  - $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \left||z| - |z'|\right| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
  - $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \quad |z_1 - z_3| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$.
- **Remarque :** représentation graphique des complexes ; définition de l'*affixe d'un point* du plan,si $M(z)$ et $M'(z')$, l'*affixe du vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ est le complexe $z' - z$.
- **Définition :** À partir de la définition géométrique des fonctions cos et sin, construction de la fonction exponentielle $\begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ \theta \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} \end{vmatrix}$
- **Propriété (...fondamentale de l'exponentielle complexe) :**

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{e}^{i(\theta_1 + \theta_2)} = \mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2}$$

- **Définition :** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, les arguments de z sont les $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{e}^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$.
$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, l'argument principal de z est $\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) \cap]-\pi,\, \pi[$.
- **Définition :** On appelle écriture sous forme trigonométrique (ou *polaire*) d'un complexe z non nul, $\rho \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
- **Propriété :** Si $r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1} = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$ avec $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$.