



Semaine 04

lundi 7 oct. 2024
> samedi 12 oct. 2024

Chapitre 1 Logique, Ensembles

■ Injections, surjections, bijections :

Définition (Injection, surjection, bijection) :

Soit E , F et G trois ensembles, $f \in F^E$, $g \in G^F$;

- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont injectives, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est injective.
- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont surjectives, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est surjective.
- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est bijective.

Réciproquement ;

- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Définition (caractérisation de la fonction réciproque) :

Si $f : E \rightarrow F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1 • f est bijective de E sur F
- 2 • il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$

De plus, si l'une des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée « fonction réciproque de f », notée f^{-1} .

► **Propriété :** Si $(f, g) \in F^E \times G^F$ sont bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

► **Définition (Images directe et réciproque d'une partie) :**

Si $f \in F^E$, on définit :

- $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f(A) = \{f(x), x \in A\}.$
- $\forall B \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$

Chapitre 2 Techniques de calcul

■ Sommes et produits :

■ Propriétés usuelles :

► Propriétés :

Distributivité, associativité.

Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $\mu \in \mathbb{C}$,

$$\mu \left(\sum_{k=a}^b \alpha_k \right) = \left(\sum_{k=a}^b \mu \alpha_k \right) \quad \left(\sum_{k=a}^b \alpha_k \right) + \left(\sum_{k=a}^b \beta_k \right) = \left(\sum_{k=a}^b (\alpha_k + \beta_k) \right)$$

► Propriété (Règle de Chasles) :

Si $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ sont tels que $b \in [a, c]$, et si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$\left(\sum_{k=a}^b \alpha_k \right) + \left(\sum_{k=b+1}^c \alpha_k \right) = \left(\sum_{k=a}^c \alpha_k \right)$$

$$\left(\prod_{k=a}^b \alpha_k \right) \times \left(\prod_{k=b+1}^c \alpha_k \right) = \left(\prod_{k=a}^c \alpha_k \right)$$

► Propriété (Sommes et produits télescopiques) :

Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{*\mathbb{N}}$ on a :

$$\left(\sum_{k=a}^b (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \right) = \alpha_{b+1} - \alpha_a \quad \left(\prod_{k=a}^b \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \right) = \frac{\beta_a}{\beta_{b+1}}$$

► Propriété (Changements d'indices) :

Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $d \in \mathbb{Z}$ est tel que $a + d \geq 0$, on a :

$$\sum_{j=a}^b \alpha_{j+d} = \sum_{k=a+d}^{b+d} \alpha_k.$$

Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $d \in \mathbb{N}$ est tel que $d - b \geq 0$, on a :

$$\sum_{j=a}^b \alpha_j = \sum_{k=d-b}^{d-a} \alpha_{d-k}.$$

■ Formules usuelles :

Propriété (somme d'une progression arithmétique) :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leq b$:

$$\sum_{k=a}^b k = (b - a + 1) \frac{a + b}{2}$$

Propriété (somme d'une progression géométrique) :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leq b$ et pour tout $r \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=a}^b v_k = v_a \left(\frac{1 - r^{b-a+1}}{1 - r} \right)$$

Propriété :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right]$$

■ Sommes doubles :

► Propriété :

Si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, si $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$, on a :

$$\left(\sum_{k_1=a}^b \alpha_{k_1} \right) \left(\sum_{k_2=c}^d \beta_{k_2} \right) = \left(\sum_{k_1=a}^b \sum_{k_2=c}^d \alpha_{k_1} \beta_{k_2} \right)$$

On pourra encore noter :

$$\sum_{(k_1, k_2) \in [a, b] \times [c, d]} \alpha_{k_1} \beta_{k_2}.$$

► Propriété :

Si $(\alpha_{i,j})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$, si $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \alpha_{i,j} \right) = \left(\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \alpha_{i,j} \right) = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \alpha_{i,j} \right)$$

■ Coefficients binomiaux :

► Définition (factorielle) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $n!$ (« factorielle de n » ou « n factorielle ») l'entier défini par récurrence par $0! = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \prod_{k=1}^n k.$

► Définition :

Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ (« k parmi n ») la quantité définie par :

$$\text{Si } 0 \leq k \leq n, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \text{ Sinon, } \binom{n}{k} = 0.$$

Propriété (relation de Pascal) :

On a $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$

On en déduit en particulier que $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$

► Interprétation (triangle de Pascal) :

La relation de Pascal permet de construire les coefficients binomiaux rapidement.

Propriété (formule du binôme) :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Chapitre 3 Rappels sur les réels

■ Les réels :

► Propriété (ensemble des réels) :

L'ensemble des réels est muni de deux lois de composition internes (c'est-à-dire : fonctions de $E \times E \rightarrow E$) : l'addition, notée $+$ et le produit, noté $\times$.

Ces opérations vérifient les propriétés suivantes :

- Associativité de $+$: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x+y)+z = x+(y+z).$
- Existence d'un élément neutre pour la loi $+$, noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+0 = 0+x = x.$
- Tout réel x admet un symétrique pour la loi $+$, c'est-à-dire un réel x' tel que : $x+x' = x'+x = 0.$

On note cet élément $-x$ et plutôt que d'écrire $y+(-x)$, on note directement $y-x$.

- Commutativité de $+$: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+y = y+x.$
- Associativité de $\times$: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z).$
- Existence d'un élément neutre pour la loi $\times$, noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = 1 \times x = x.$
- Commutativité de $\times$: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \times y = y \times x.$
- Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (à gauche et à droite) : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (x+y) \times z = (x \times z) + (y \times z) \\ z \times (x+y) = (z \times x) + (z \times y) \end{cases}$

- Tout réel *non nul* x admet une *symétrique* pour la loi $+$, c'est-à-dire un réel x'' tel que : $x + x'' = x'' + x = 1$.

On note cet élément $\frac{1}{x}$ et plutôt que d'écrire $y \times \frac{1}{x}$ ou $y \times \frac{1}{x}$, on note directement $\frac{y}{x}$.

De plus, $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui est compatible avec l'addition et la multiplication :

- $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \left[(a \leq b) \text{ et } (c \leq d) \right] \implies (a + c) \leq (b + d)$.
- $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \left[(a \leq b) \text{ et } (c \geq 0) \right] \implies a \times c \leq b \times c$.

► Définition (intervalles) :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties suivantes : $\emptyset, \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R},]a, +\infty[$.

■ Quelques théorèmes admis temporairement :

► Définitions :

Écriture des propriétés suivantes avec des quantificateurs : fonction paire, impaire, majorée, minorée, bornée, périodique, croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.

► Définitions (voisinages) :

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de x_0 lorsque : $\exists \alpha > 0,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset V$.
- On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de $+\infty$ lorsque : $\exists A \in \mathbb{R},]A, +\infty[\subset V$.
- On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de $-\infty$ lorsque : $\exists B \in \mathbb{R},]-\infty, B[\subset V$.
- Pour un $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0 .
On utilise parfois la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

► Propriété : Propriétés opératoires de continuité et de dérivation (en particulier pour les composées).

Une utilisation erronée (« la composée de deux fonctions dérivables en $x_0 \dots$ ») doit être sanctionnée !

► Notations : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, on note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I , $\mathcal{D}^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I , puis on définit par récurrence les ensembles suivants :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{D}^{k+1}(I) = \left\{ f \in \mathcal{D}^1(I) \mid f' \in \mathcal{D}^k(I) \right\}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{C}^{k+1}(I) = \left\{ f \in \mathcal{D}^1(I) \mid f' \in \mathcal{C}^k(I) \right\}$.

On note également $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I)$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N} : \mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^{k+1}(I) \subset \mathcal{D}^{k+1}(I) \subset \mathcal{C}^k(I)$.

► Propriété : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

$$\left[a, +\infty[\cup \left[\forall b \in \mathbb{R},]-\infty, b] \right] \cup]-\infty, b[\cup \left[\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } a \leq b, \left[a, b \right] \cup \left[a, b[\cup \left[a, b] \cup \left[a, b[\right] \right] \right]$$

Dans la liste précédente, on indique les intervalles ouverts, fermés, bornés (en donnant les définitions de ces notions).

► Définition (valeur absolue) :

Pour tout x réel, on définit la valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel :

$$\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

► Propriété (inégalités triangulaires) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Soit f une fonction strictement monotone et **continue** sur I .

1 • Alors $f(I)$ est un intervalle,

2 • f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

3 • De plus la bijection réciproque f^{-1} est également strictement monotone (de même stricte monotonie que f)

4 • Et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.

► Propriété : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit f une fonction strictement monotone et **dérivable** sur I .

5 • Pour tout $x \in I$, f^{-1} est dérivable en $f(x)$ si et seulement si $f'(x) \neq 0$;

6 • Si $x \in I$, lorsque $f'(x) \neq 0$, on a $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

7 • On peut énoncer le point précédent différemment : si $y \in f(I)$, lorsque $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, on a : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

► Théorème (Existence d'une primitive pour une fonction continue) :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \exists F \in \mathcal{C}^1(I), F' = f$$

► Propriété : Deux fonctions dérivables de même dérivée sur un intervalle diffèrent d'une constante sur cet intervalle.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, on dispose donc d'une expression « sous forme intégrale » de la primitive d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$ qui s'annule en $x_0 \in I : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$.

► Propriété : Formule de changement de variable dans les intégrales (sans démonstration) dans le cas d'une fonction bijective $\mathcal{C}^1$. Essentiellement utilisée sur des exemples avec des changements de variable affines.

► Propriété : On admet enfin la propriété suivante pour les fonctions f croissantes sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$:

- si f est majorée, sa limite en $+\infty$ existe et est finie;
- si f n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

Chapitre 4 Fonctions usuelles

■ Logarithmes, Exponentielles et Puissances :

► Définition : La fonction *logarithme népérien*, notée $\ln$ est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

► Propriétés élémentaires : $\ln$ est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; on a :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*, \ln(x^n) = n \ln x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$$

► Corollaire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.

► Définition : On note e (nombre de Néper) l'antécédent de 1 par $\ln$.

► Définition : La fonction exponentielle, définie de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, est la bijection réciproque de $\ln$.

► Propriétés élémentaires : $\exp$ est une fonction bijective, strictement croissante, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x + 1$$

Les trois premières égalités justifient l'usage de la notation $\exp(x) = e^x$.

La dérivée de $\exp$ sur $\mathbb{R}$ est $\exp$.

► Corollaire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$.

► Définition : Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on note $\log_a$: $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{cases}$ le logarithme de base a et $\exp_a$: $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \exp(x \ln(a)) \end{cases}$ l'exponentielle de base a .

Propriétés élémentaires.

► Définition : On appelle fonction puissance d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction

$$p_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)) \end{cases}$$

► Lemme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

► Propriété (croissances comparées du logarithme et des puissances) :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0$$

► Remarque : La situation $a \leq 0$ et $b \geq 0$ peut s'étudier directement (il n'y a pas d'indétermination; idem pour $a \geq 0$ et $b \leq 0$. Le cas $a < 0$ et $b < 0$ s'obtient en passant à l'inverse dans le cas précédent.

► Propriété (croissances comparées de l'exponentielle et des puissances) :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^a}{x^b} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b (e^x)^a = 0$$

■ Fonctions circulaires et circulaires réciproques :

► Définition : Les fonctions circulaires sont construites de façon géométrique (on suppose connues les notions de géométrie plane); des idées de démonstrations (géométriques) des différentes propriétés ont été données...

► Formules trigonométriques usuelles

► Définition (fonctions circulaires réciproques) : Arccos, Arcsin et Arctan, conti-

nuit, dérivabilité, expression des dérivées :

$$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{Arcsin}'(x) = -\operatorname{Arccos}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

■ Les limites suivantes sont à connaître (sans démonstration)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$