Semaine 03

lundi 30 sep. 2024
> samedi 5 oct. 2024

Chapitre 1 Logique, Ensembles

Injections, surjections, bijections :

Définition (Injection, surjection, bijection) :
Soit E, F et G trois ensembles, $f \in F^E$, $g \in G^F$;
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives, alors $g \circ f : E \to G$ est injective.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont surjectives, alors $g \circ f : E \to G$ est surjective.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ est bijective.

Réciproquement ;
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Définition (caractérisation de la fonction réciproque) :
Si $f : E \to F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
1 • f est bijective de E sur F
2 • il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$
De plus, si l'une des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée « *fonction réciproque de f* », notée f^{-1}.

Propriété : Si $(f, g) \in F^E \times G^F$ sont bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition (Images directe et réciproque d'une partie) :
Si $f \in F^E$, on définit :
- $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f(A) = \left\{ f(x),\ x \in A \right\}$.
- $\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad f^{-1}(B) = \left\{ x \in E \ \middle/ \ f(x) \in B \right\}$.

Chapitre 2 Techniques de calcul

Sommes et produits :

Propriétés usuelles :

Propriétés :
Distributivité, associativité.
Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $\mu \in \mathbb{C}$,

$$\mu \left(\sum_{k=a}^{b} \alpha_k \right) = \left(\sum_{k=a}^{b} \mu\alpha_k \right) \qquad \left(\sum_{k=a}^{b} \alpha_k \right) + \left(\sum_{k=a}^{b} \beta_k \right) = \left(\sum_{k=a}^{b} (\alpha_k + \beta_k) \right)$$

Propriété (Règle de Chasles) :
Si $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ **sont tels que** $\mathbf{b} \in \mathbf{a}, \mathbf{c}$, et si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$\left(\sum_{k=a}^{b} \alpha_k \right) + \left(\sum_{k=b+1}^{c} \alpha_k \right) = \left(\sum_{k=a}^{c} \alpha_k \right)$$

$$\left(\prod_{k=a}^{b} \alpha_k \right) \times \left(\prod_{k=b+1}^{c} \alpha_k \right) = \left(\prod_{k=a}^{c} \alpha_k \right)$$

Propriété (Sommes et produits télescopiques) :
Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{*\mathbb{N}}$ on a :

$$\left(\sum_{k=a}^{b} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \right) = \alpha_{b+1} - \alpha_a \qquad \left(\prod_{k=a}^{b} \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \right) = \frac{\beta_a}{\beta_{b+1}}$$

Propriété (Changements d'indices) :
Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $d \in \mathbb{Z}$ est tel que $a + d \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\sum_{j=a}^{b} \alpha_{j+d} = \sum_{k=a+d}^{b+d} \alpha_k$.
Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $d \in \mathbb{N}$ est tel que $d - b \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\sum_{j=a}^{b} \alpha_j = \sum_{k=d-b}^{d-a} \alpha_{d-k}$.

Formules usuelles :

Propriété (somme d'une progression arithmétique) :
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leqslant b$:

$$\sum_{k=a}^{b} k = (b - a + 1)\frac{a+b}{2}$$

Propriété (somme d'une progression géométrique) :
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leqslant b$ et pour tout $r \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=a}^{b} v_k = v_a \left(\frac{1 - r^{b-a+1}}{1 - r} \right)$$

Propriété :
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right]$$

Sommes doubles :

Propriété :
Si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, si $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$, on a :

$$\left(\sum_{k_1=a}^{b} \alpha_{k_1} \right) \left(\sum_{k_1=c}^{d} \beta_{k_2} \right) = \left(\sum_{k_1=a}^{b} \sum_{k_2=c}^{d} \alpha_{k_1}\beta_{k_2} \right)$$

On pourra encore noter : $\displaystyle\sum_{(k_1, k_2) \in a, b \times c, d} \alpha_{k_1}\beta_{k_2}$.

Propriété :
Si $(\alpha_{i,j})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$, si $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \alpha_{i,j} \right) = \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \alpha_{i,j} \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \alpha_{i,j} \right)$$

Coefficients binomiaux :

Définition (factorielle) :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $n!$ (« factorielle de n » ou « n factorielle ») l'entier défini par récurrence par $0! = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$.

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

Définition :
Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\dbinom{n}{k}$ (« k parmi n ») la quantité définie par :
Si $0 \leqslant k \leqslant n$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; Sinon, $\dbinom{n}{k} = 0$.

Propriété (relation de Pascal) :
On a $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$.

On en déduit en particulier que $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \dbinom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Interprétation (triangle de Pascal) :
La relation de Pascal permet de construire les coefficients binomiaux rapidement.

Propriété (formule du binôme) :
$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Chapitre 3 Rappels sur les réels

Les réels :

- **Propriété (ensemble des réels) :**
L'ensemble des réels est muni de deux *lois de composition internes* (c'est-à-dire : fonctions de $E \times E \to E$) : l'addition, notée $+$ et le produit, noté $\times$.
Ces opérations vérifient les propriétés suivantes :
  - Associativité de $+$: $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$.
  - Existence d'un élément neutre pour la loi $+$, noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+0 = 0+x = x$.
  - Tout réel x admet un *symétrique pour la loi* $+$, c'est-à-dire un réel x' tel que : $x + x' = x' + x = 0$.
  On note cet élément $-x$ et plutôt que d'écrire $y + (-x)$, on note directement $y - x$.
  - Commutativité de $+$: $\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+y = y+x$.
  - Associativité de $\times$: $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
  - Existence d'un élément neutre pour la loi $\times$, noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.
  - Commutativité de $\times$: $\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \times y = y \times x$.
  - Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (à gauche et à droite) : $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (x+y)\times z &= (x \times z) + (y \times z) \\ z \times (x+y) &= (z \times x) + (z \times y) \end{cases}$.
  - Tout réel *non nul* x admet un *symétrique pour la loi* $+$, c'est-à-dire un réel x'' tel que : $x \times x'' = x'' \times x = 1$.
  On note cet élément $\dfrac{1}{x}$ et plutôt que d'écrire $y \times \dfrac{1}{x}$ ou $y \times \dfrac{1}{x}$, on note directement $\dfrac{y}{x}$
De plus, $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ *qui est compatible avec l'addition et la multiplication* :
  - $\forall (a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbb{R}^4, \quad \Big[(a \leqslant b) \quad \text{et} \quad (c \leqslant d)\Big] \implies (a+c) \leqslant (b+d)$.
  - $\forall (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \Big[(a \leqslant b) \quad \text{et} \quad (c \geqslant 0)\Big] \implies a \times c \leqslant b \times c$.
- **Définition (intervalles) :**
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties suivantes : $\varnothing$, $\mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\big]a,\, +\infty\big[$, $\big[a,\, +\infty\big[$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\big]-\infty,\, b\big]$, $\big]-\infty,\, b\big[$, $\forall (a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leqslant b$, $\big[a,\, b\big]$, $\big[a,\, b\big[$, $\big]a,\, b\big]$, $\big]a,\, b\big[$.
Dans la liste précédente, on indique les intervalles ouverts, fermés, bornés (en donnant les définitions de ces notions).
- **Définition (valeur absolue) :**
Pour tout x réel, on définit la valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel : $\begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- **Propriété (inégalités triangulaires) :**
$\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big| |x| - |y| \Big| \leqslant \big|x+y\big| \leqslant |x| + |y|$.

Quelques théorèmes admis temporairement :

- **Définitions :**
Écriture des propriétés suivantes avec des quantificateurs : fonction paire, impaire, majorée, minorée, bornée, périodique, croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.
- **Définitions (voisinages) :**
  - Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* x_0 lorsque :
  $\exists \alpha > 0, \quad \big]x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha\big[\subset V$.
  - On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* $+\infty$ lorsque : $\exists A \in \mathbb{R}, \quad \big]A,\, +\infty[\subset V$.
  - On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de* $-\infty$ lorsque : $\exists B \in \mathbb{R}, \quad \big]-\infty,\, B[\subset V$.
  - Pour un $x_0 \in \mathbb{R} \cup \Big\{-\infty,\, +\infty\Big\}$, on note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.
  On utilise parfois la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R} \cup \Big\{-\infty,\, +\infty\Big\}$.
- **Propriété :** Propriétés opératoires de continuité et de dérivation (en particulier pour les composées).
Une utilisation erronée (« la composée de deux fonctions dérivables en x_0... ») doit être sanctionnée !
- **Notations :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, on note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I, $\mathcal{D}^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I, puis on définit par récurrence les ensembles suivants :
  - $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{D}^{k+1}(I) = \Big\{f \in \mathcal{D}^1(I) \;\Big/\; f' \in \mathcal{D}^k(I)\Big\}$.
  - $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{C}^{k+1}(I) = \Big\{f \in \mathcal{D}^1(I) \;\Big/\; f' \in \mathcal{C}^k(I)\Big\}$.
On note également $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I)$.
On a pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^{k+1}(I) \subset \mathcal{D}^{k+1}(I) \subset \mathcal{C}^k(I)$.
- **Propriété :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction strictement monotone et **continue** sur I.
  1. Alors $f(I)$ est un intervalle,
  2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
  3. De plus la bijection réciproque f^{-1} est également strictement monotone (de même stricte monotonie que f)
  4. Et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.
- **Propriété :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction strictement monotone et **dérivable** sur I.
  5. Pour tout $x \in I$, f^{-1} est dérivable en $f(x)$ si et seulement si $f'(x) \neq 0$;
  6. Si $x \in I$, lorsque $f'(x) \neq 0$, on a $(f^{-1})'\Big(f(x)\Big) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
  7. On peut énoncer le point précédent différemment : si $y \in f(I)$, lorsque $f'\Big(f^{-1}(y)\Big)x) \neq 0$, on a : $(f^{-1})'\Big(y\Big) = \dfrac{1}{f'\Big(f^{-1}(y)\Big)}$.
- **Théorème (Existence d'une primitive pour une fonction continue) :**
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \quad \exists F \in \mathcal{C}^1(I), \quad F' = f$$
- **Propriété :** Deux fonctions dérivables de même dérivée **sur un intervalle** diffèrent d'une constante sur cet intervalle.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, on dispose donc d'une expression « sous forme intégrale » de **la** primitive d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$ qui s'annule en $x_0 \in I$: $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$.
- **Propriété :** On admet enfin la propriété suivante pour les fonctions f croissantes sur un intervalle de la forme $]a,\, +\infty[$:
  - si f est majorée, sa limite en $+\infty$ existe et est finie ;
  - si f n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

Chapitre 4 Fonctions usuelles

Logarithmes, Exponentielles et Puissances :

- **Définition :** La fonction *logarithme népérien*, notée $\ln$ est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
- **Propriétés élémentaires :** $\ln$ est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; on a :
$$\forall (x,\, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln\Big(\frac{x}{y}\Big) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x^n) = n \ln x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$$
- **Corollaire :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- **Définition :** On note e (nombre de Néper) l'antécédent de 1 par ln.
- **Définition :** La fonction exponentielle, définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, est la bijection réciproque de ln.
- **Lemme :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$