Semaine 02

lundi 23 sep. 2024
> samedi 28 sep. 2024

Chapitre 1 Logique, Ensembles

■ Logique :

- **Vocabulaire :** « *proposition* » (ou « *assertion* ») :
  il s'agit d'une phrase non ambigüe à laquelle est associée une valeur de vérité « `vrai` » ou « `faux` ».
  Principe du tiers-exclu ; un « *théorème* » est une assertion vraie.
- **Définitions :**
  L'opérateur de négation ; Les connecteurs logiques (binaires) : il existe 16 connecteurs logiques binaires ; parmi ceux-ci on présente : « et » (*conjonction*), « ou » (*disjonction*), « implique » et « équivaut à ».
- **Propriétés :** le « ou » est inclusif ; on peut écrire « $p \implies q$ » sous la forme « $(\text{non}\, p)$ ou q ».
- **Définition :** La *réciproque* de l'implication « $p \implies q$ » est l'implication « $q \implies p$ » (à ne confondre ni avec la *contraposée*, ni avec la négation).
- **Propriétés (connecteurs logiques) :**
  - Associativité de « et » et « ou »
  - Transitivité de « $\implies$ »
  - Distributivité de « et » sur « ou »
  - Distributivité de « ou » sur « et »
- **Propriétés (Lois de De Morgan) :** Soit p et q deux assertions ;

$$\text{non}(p \text{ et } q) \iff \Big(\big(\text{non}(p)\big) \text{ ou } \big(\text{non}(q)\big)\Big)$$

$$\text{non}(p \text{ ou } q) \iff \Big(\big(\text{non}(p)\big) \text{ et } \big(\text{non}(q)\big)\Big)$$

- **Vocabulaire (différents types de raisonnements) :**
  preuve de la propriété « n et n^2 ont même parité » en utilisant différents types de preuves : élémentaire directe ; par disjonction de cas ; par contraposition ; par l'absurde ; par récurrence.

■ Ensembles :

- **Définition :** « Problèmes de définition »
- **Notations :** $\in$, $\ni$, $\subset$ et $\supset$; $x \in E \iff \{x\} \subset E$.
  Famille des parties d'un ensemble E : $\mathscr{P}(E)$; $F \subset E \iff F \in \mathscr{P}(E)$.
- **Définition (opérations usuelles dans $\mathscr{P}(E)$) :**
  Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on définit :
  - la réunion : $A \cup B = \Big\{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\Big\}$;
  - l'intersection : $A \cap B = \Big\{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\Big\}$;
  - le complémentaire dans E : $\complement_E A = \Big\{x \in E,\ x \notin A\Big\}$;
  - la différence de A et B : $A \backslash B = A \cap \complement_E B = \Big\{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\Big\}$.
- **Vocabulaire :** Deux parties A et B sont dites « *disjointes* » si $A \cap B = \varnothing$ et « *distinctes* » si $A \neq B$.
- **Définition :** Les quantificateurs ; le *quantificateur universel* « $\forall$ », le *quantificateur existentiel* « $\exists$ ».
  Notation $\exists!$ (traduite à l'aide de $\forall$ et $\exists$).
- **Propriété :** règles de manipulation des quantificateurs, en particulier :
  - Toute variable doit être quantifiée exactement une fois (avant sa première utilisation, de façon explicite ou implicite)
  - L'ordre des quantificateurs est important (lorsqu'ils sont de type différent)
  - Négation des assertions avec quantificateurs :

$$\text{non}\,(\forall x \in E,\quad A(x)) \iff (\exists x \in E,\quad \text{non}\,(A(x)))$$
$$\text{non}\,(\exists x \in E,\quad A(x)) \iff (\forall x \in E,\quad \text{non}\,(A(x)))$$

- **Remarque :** Lien « théorie des ensembles / logique » en utilisant :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\quad A = \Big\{x \in E;\ x \in A\Big\}$$

- **Définition :** Une fonction f de E vers F est la donnée d'un triplet $(E,\,F,\,\Gamma)$ où Γ est une partie de $E \times F$ telle que
  $\forall (x,\,y,\,y') \in E \times F \times F,\quad \Big[(x,\,y) \in \Gamma \text{ et } (x,\,y') \in \Gamma\Big] \implies y = y'$
  On écrit $y = f(x)$ plutôt que $(x,\,y) \in \Gamma$.
- **Définition :** L'ensemble de définition de f est :

$$\Big\{x \in E,\quad \exists y \in F,\ (x,\,y) \in \Gamma\Big\}$$

- **Définition :** Une application est une fonction dont l'ensemble de définition est égal à l'ensemble de départ.
  En pratique, on tolère l'utilisation de « *fonction* » et « *application* » indifféremment.
  On note l'ensemble des fonctions de E dans F par $\mathscr{F}(E,\,F)$ ou F^E.
- **Exemples :** application identité de $E \to E$, injection canonique de $E \to F$ (si $E \subset F$).
- **Définition et propriétés :** Composition des applications « $\circ$ » ; il s'agit d'une opération (pseudo-)associative mais non commutative en général

■ Injections, surjections, bijections :

- **Définition (Injection, surjection, bijection) :**
  Soit E, F et G trois ensembles, $f \in F^E$, $g \in G^F$;
  - Si $f\ :\ E \to F$ et $g\ :\ F \to G$ sont injectives, alors $g \circ f\ :\ E \to G$ est injective.
  - Si $f\ :\ E \to F$ et $g\ :\ F \to G$ sont surjectives, alors $g \circ f\ :\ E \to G$ est surjective.
  - Si $f\ :\ E \to F$ et $g\ :\ F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f\ :\ E \to G$ est bijective.
- Réciproquement ;
  - Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
  - Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- **Définition (caractérisation de la fonction réciproque) :**
  Si $f\ :\ E \to F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
  1. f est bijective de E sur F
  2. il existe une application $g\ :\ F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$

  De plus, si l'une des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée « *fonction réciproque de f* », notée f^{-1}.
- **Propriété :** Si $(f,\,g) \in F^E \times G^F$ sont bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- **Définition (Images directe et réciproque d'une partie) :**
  Si $f \in F^E$, on définit :
  - $\forall A \in \mathscr{P}(E),\quad f(A) = \Big\{f(x),\ x \in A\Big\}$.
  - $\forall B \in \mathscr{P}(F),\quad f^{-1}(B) = \Big\{x \in E\ \Big/\ f(x) \in B\Big\}$.

Chapitre 2 Techniques de calcul

■ Sommes et produits :

- **Définition (symbole $\sum$) :**
  Si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de complexes, on note : $\displaystyle\sum_{k=0}^{-1} \alpha_k = 0$, et on construit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) + \alpha_{n+1}$. Si a et b sont deux entiers quelconques, on définit plus généralement $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} \alpha_k$:
  Si $b < a$: $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} \alpha_k = 0$; si $a \leqslant b$: $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} \alpha_k = \left(\sum_{k=0}^{b} \alpha_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{a-1} \alpha_k\right)$.
- **Généralisation :**
  Si $I = \{i_j,\ j \in 1,\,n\}$ est un ensemble fini (à n éléments), si $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une famille de complexes indexée par I, on note $\displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i$ au lieu de $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j}$.
- **Définition (symbole $\prod$) :**
  Si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de complexes, on note : $\displaystyle\prod_{k=0}^{-1} \alpha_k = 1$, et on construit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1} \alpha_k = \left(\prod_{k=0}^{n} \alpha_k\right) \times \alpha_{n+1}$.

Propriétés usuelles :

- **Propriétés :**
Distributivité, associativité.
Si $(a,\, b) \in \mathbb{N}^2$, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $\mu \in \mathbb{C}$,
$$\mu\left(\sum_{k=a}^{b} \alpha_k\right) = \left(\sum_{k=a}^{b} \mu\alpha_k\right) \quad \left(\sum_{k=a}^{b} \alpha_k\right) + \left(\sum_{k=a}^{b} \beta_k\right) = \left(\sum_{k=a}^{b} (\alpha_k + \beta_k)\right)$$

- **Propriété (Règle de Chasles) :**
Si $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{N}^3$ **sont tels que** $\mathbf{b} \in \mathbf{a},\, \mathbf{c}$, et si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,
$$\left(\sum_{k=a}^{b} \alpha_k\right) + \left(\sum_{k=b+1}^{c} \alpha_k\right) = \left(\sum_{k=a}^{c} \alpha_k\right)$$
$$\left(\prod_{k=a}^{b} \alpha_k\right) \times \left(\prod_{k=b+1}^{c} \alpha_k\right) = \left(\prod_{k=a}^{c} \alpha_k\right)$$

- **Propriété (Sommes et produits télescopiques) :**
Si $(a,\, b) \in \mathbb{N}^2$ et si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{*\mathbb{N}}$ on a :
$$\left(\sum_{k=a}^{b} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)\right) = \alpha_{b+1} - \alpha_a \qquad \left(\prod_{k=a}^{b} \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right) = \frac{\beta_a}{\beta_{b+1}}$$

- **Propriété (Changements d'indices) :**
Si $(a,\, b) \in \mathbb{N}^2$, si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $d \in \mathbb{Z}$ est tel que $a + d \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\sum_{j=a}^{b} \alpha_{j+d} = \sum_{k=a+d}^{b+d} \alpha_k$.
Si $(a,\, b) \in \mathbb{N}^2$, si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $d \in \mathbb{N}$ est tel que $d - b \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\sum_{j=a}^{b} \alpha_j = \sum_{k=d-b}^{d-a} \alpha_{d-k}$.

Formules usuelles :

- **Propriété (somme d'une progression arithmétique) :**
Pour tout $(a,\, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leqslant b$:
$$\sum_{k=a}^{b} k = (b - a + 1)\,\frac{a+b}{2}$$

- **Propriété (somme d'une progression géométrique) :**
Pour tout $(a,\, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leqslant b$ et pour tout $r \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:
$$\sum_{k=a}^{b} v_k = v_a\left(\frac{1 - r^{b-a+1}}{1 - r}\right)$$

- **Propriété :**
Pour tout $(a,\, b) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$a^n - b^n = (a - b)\left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right]$$

Sommes doubles :

- **Propriété :**
Si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, si $(a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbb{N}^4$, on a :
$$\left(\sum_{k_1=a}^{b} \alpha_{k_1}\right)\left(\sum_{k_1=c}^{d} \beta_{k_2}\right) = \left(\sum_{k_1=a}^{b}\sum_{k_2=c}^{d} \alpha_{k_1}\beta_{k_2}\right)$$
On pourra encore noter : $\displaystyle\sum_{(k_1,\, k_2)\in a,\, b\times c,\, d} \alpha_{k_1}\beta_{k_2}$.

- **Propriété :**
Si $(\alpha_{i,\,j})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$, si $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \alpha_{i,\,j}\right) = \left(\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} \alpha_{i,\,j}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \alpha_{i,\,j}\right)$$

Coefficients binomiaux :

- **Définition (factorielle) :**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $n!$ (« factorielle de n » ou « n factorielle ») l'entier défini par récurrence par $0! = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$.
Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

- **Définition :**
Pour tout $(k,\, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\dbinom{n}{k}$ (« k parmi n ») la quantité définie par :
Si $0 \leqslant k \leqslant n$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; Sinon, $\dbinom{n}{k} = 0$.

- **Propriété (relation de Pascal) :**
On a $\forall (k,\, n) \in \mathbb{N}^2$, $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$.
On en déduit en particulier que $\forall (k,\, n) \in \mathbb{N}^2$, $\dbinom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

- **Interprétation (triangle de Pascal) :**
La relation de Pascal permet de construire les coefficients binomiaux rapidement.

- **Propriété (formule du binôme) :**
$\forall (a,\, b) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Chapitre 3 Fonctions usuelles

Les réels :

- **Propriété (ensemble des réels) :**
L'ensemble des réels est muni de deux *lois de composition internes* (c'est-à-dire : fonctions de $E \times E \to E$) : l'addition, notée $+$ et le produit, noté $\times$.
Ces opérations vérifient les propriétés suivantes :
  - Associativité de $+$: $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$.
  - Existence d'un élément neutre pour la loi $+$, noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 0 = 0 + x = x$.
  - Tout réel x admet un *symétrique pour la loi* $+$, c'est-à-dire un réel x' tel que : $x + x' = x' + x = 0$.
  On note cet élément $-x$ et plutôt que d'écrire $y + (-x)$, on note directement $y - x$.
  - Commutativité de $+$: $\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y = y + x$.
  - Associativité de $\times$: $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
  - Existence d'un élément neutre pour la loi $\times$, noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.
  - Commutativité de $\times$: $\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \times y = y \times x$.
  - Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (à gauche et à droite) : $\forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} (x+y) \times z & = (x \times z) + (y \times z) \\ z \times (x+y) & = (z \times x) + (z \times y) \end{cases}$.
  - Tout réel *non nul* x admet un *symétrique pour la loi* $+$, c'est-à-dire un réel x'' tel que : $x \times x'' = x'' \times x = 1$.
  On note cet élément $\dfrac{1}{x}$ et plutôt que d'écrire $y \times \dfrac{1}{x}$ ou $y \times \dfrac{1}{x}$, on note directement $\dfrac{y}{x}$

De plus, $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ *qui est compatible avec l'addition et la multiplication* :
  - $\forall (a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbb{R}^4, \quad \Big[(a \leqslant b) \quad \text{et} \quad (c \leqslant d)\Big] \implies (a+c) \leqslant (b+d)$.
  - $\forall (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \Big[(a \leqslant b) \quad \text{et} \quad (c \geqslant 0)\Big] \implies a \times c \leqslant b \times c$.