Semaine 01

lundi 16 sep. 2024
> samedi 21 sep. 2024

Chapitre 1 Logique, Ensembles

■ Logique :

- **Vocabulaire :** « *proposition* » (ou « *assertion* ») :
  il s'agit d'une phrase non ambigüe à laquelle est associée une valeur de vérité « `vrai` » ou « `faux` ».
  Principe du tiers-exclu ; un « *théorème* » est une assertion vraie.
- **Définitions :**
  L'opérateur de négation ; Les connecteurs logiques (binaires) : il existe 16 connecteurs logiques binaires ; parmi ceux-ci on présente : « et » (*conjonction*), « ou » (*disjonction*), « implique » et « équivaut à ».
- **Propriétés :** le « ou » est inclusif ; on peut écrire « $p \implies q$ » sous la forme « $(\text{non}\, p)$ ou q ».
- **Définition :** La *réciproque* de l'implication « $p \implies q$ » est l'implication « $q \implies p$ » (à ne confondre ni avec la *contraposée*, ni avec la négation).
- **Propriétés (connecteurs logiques) :**
  - Associativité de « et » et « ou »
  - Transitivité de « $\implies$ »
  - Distributivité de « et »sur « ou »
  - Distributivité de « ou »sur « et »
- **Propriétés (Lois de De Morgan) :** Soit p et q deux assertions ;

$$\text{non}\big(p \text{ et } q\big) \iff \Big(\big(\text{non}(p)\big) \text{ ou } \big(\text{non}(q)\big)\Big)$$
$$\text{non}\big(p \text{ ou } q\big) \iff \Big(\big(\text{non}(p)\big) \text{ et } \big(\text{non}(q)\big)\Big)$$

- **Vocabulaire (différents types de raisonnements) :**
  preuve de la propriété « n et n^2 ont même parité » en utilisant différents types de preuves : élémentaire directe ; par disjonction de cas ; par contraposition ; par l'absurde ; par récurrence.

■ Ensembles :

- **Définition :** « Problèmes de définition »
- **Notations :** $\in$, $\ni$, $\subset$ et $\supset$; $x \in E \iff \{x\} \subset E$.
  Famille des parties d'un ensemble E : $\mathscr{P}(E)$; $F \subset E \iff F \in \mathscr{P}(E)$.
- **Définition (opérations usuelles dans $\mathscr{P}(E)$) :**
  Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on définit :
  - la réunion : $A \cup B = \Big\{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\Big\}$;
  - l'intersection : $A \cap B = \Big\{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\Big\}$;
  - le complémentaire dans E : $\complement_E A = \Big\{x \in E,\ x \notin A\Big\}$;
  - la différence de A et B : $A \backslash B = A \cap \complement_E B = \Big\{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\Big\}$.
- **Vocabulaire :** Deux parties A et B sont dites « *disjointes* » si $A \cap B = \varnothing$ et « *distinctes* » si $A \neq B$.
- **Définition :** Les quantificateurs ; le *quantificateur universel* « $\forall$ », le *quantificateur existentiel* « $\exists$ ».
  Notation $\exists!$ (traduite à l'aide de $\forall$ et $\exists$).
- **Propriété :** règles de manipulation des quantificateurs, en particulier :
  - Toute variable doit être quantifiée exactement une fois (avant sa première utilisation, de façon explicite ou implicite)
  - L'ordre des quantificateurs est important (lorsqu'ils sont de type différent)
  - Négation des assertions avec quantificateurs :

$$\text{non}\,(\forall x \in E,\quad A(x)) \iff (\exists x \in E,\quad \text{non}\,(A(x)))$$
$$\text{non}\,(\exists x \in E,\quad A(x)) \iff (\forall x \in E,\quad \text{non}\,(A(x)))$$

- **Remarque :** Lien « théorie des ensembles / logique » en utilisant :
$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\quad A = \Big\{x \in E;\ x \in A\Big\}$$
- **Définition :** Une fonction f de E vers F est la donnée d'un triplet $(E,\,F,\,\Gamma)$ où Γ est une partie de $E \times F$ telle que $\forall (x,\,y,\,y') \in E \times F \times F,\quad \Big[(x,\,y) \in \Gamma \text{ et } (x,\,y') \in \Gamma\Big] \implies y = y'$
  On écrit $y = f\big(x\big)$ plutôt que $\big(x,\,y\big) \in \Gamma$.
- **Définition :** L'ensemble de définition de f est :
$$\Big\{x \in E,\quad \exists y \in F,\ \big(x,\,y\big) \in \Gamma\Big\}$$
- **Définition :** Une application est une fonction dont l'ensemble de définition est égal à l'ensemble de départ.
  En pratique, on tolère l'utilisation de « *fonction* » et « *application* » indifféremment.
  On note l'ensemble des fonctions de E dans F par $\mathscr{F}(E,\,F)$ ou F^E.
- **Exemples :** application identité de $E \to E$, injection canonique de $E \to F$ (si $E \subset F$).
- **Définition et propriétés :** Composition des applications « $\circ$ » ; il s'agit d'une opération (pseudo-)associative mais non commutative en général

■ Injections, surjections, bijections :

- **Définition (Injection, surjection, bijection) :**
  Soit E, F et G trois ensembles, $f \in F^E$, $g \in G^F$;
  - Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives, alors $g \circ f : E \to G$ est injective.
  - Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont surjectives, alors $g \circ f : E \to G$ est surjective.
  - Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ est bijective.
- Réciproquement ;
  - Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
  - Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- **Définition (caractérisation de la fonction réciproque) :**
  Si $f : E \to F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
  1. f est bijective de E sur F
  2. il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$

  De plus, si l'une des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée « *fonction réciproque de f* », notée f^{-1}.
- **Propriété :** Si $(f,\,g) \in F^E \times G^F$ sont bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

▶ **Définition (Images directe et réciproque d'une partie) :**
Si $f \in F^E$, on définit :

- $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f(A) = \left\{f(x),\ x \in A\right\}$.
- $\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad f^{-1}(B) = \left\{x \in E \ \big/ \quad f(x) \in B\right\}$.

Chapitre 2 Techniques de calcul, Fonctions réelles

■ Sommes et produits :

▶ **Définition (symbole $\sum$) :**
Si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un ensemble de complexes, on note : $\sum_{k=0}^{-1} \alpha_k = 0$, et on construit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) + \alpha_{n+1}$. Si a et b sont deux entiers quelconques, on définit plus généralement $\sum_{k=a}^{b} \alpha_k$:
Si $b < a$: $\sum_{k=a}^{b} \alpha_k = 0$; si $a \leqslant b$: $\sum_{k=a}^{b} \alpha_k = \left(\sum_{k=0}^{b} \alpha_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{a-1} \alpha_k\right)$.

▶ **Généralisation :**
Si $I = \{i_j,\ j \in [\![1,\ n]\!]\}$ est un ensemble fini (à n éléments), si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indexée par I, on note $\sum_{i\in I} \alpha_i$ au lieu de $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j}$.

■ Propriétés usuelles :

▶ **Propriété (Changements d'indices) :**
Si $(a,\ b) \in \mathbb{N}^2$, si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $d \in \mathbb{Z}$ est tel que $a + d \geqslant 0$, on a : $\sum_{j=a}^{b} \alpha_{j+d} = \sum_{k=a+d}^{b+d} \alpha_k$.

■ Formules usuelles :

▶ ♥ **Propriété (somme d'une progression arithmétique) :**
Pour tout $(a,\ b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leqslant b$:

$$\sum_{k=a}^{b} k = (b - a + 1)\,\frac{a+b}{2}$$

!

- ▶ Pour les parties désignées par un symbole ♥ une démonstration est exigible
- ▶ Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ± 15 min).
- ▶ Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (*même si l'exercice est fait correctement !*).